Concursul revistei Arhimede
Ediția a III-a. Etapa a II-a zonală.
25 febr. 2006

Enunțuri subiecte clasa a VI-a

I. **a)** Să se determine cel mai mic număr natural n astfel încât numărul

$$\frac{8^{2n+3}-4^{3n+2}-2^{6n+6}}{2^{2003}-2^{2002}-2^{2001}}$$

să fie număr natural.

Claudia Marchitan, Suceava

b) Se consideră mulțimea

$$A=\left\{\frac{2^n}{n+1} \middle| n\in N^*, n\le 2006\right\}$$

1) Aflați câte elemente din mulțimea A nu sunt numere naturale;

2) Aflați câte pătrate perfecte și câte cuburi conține mulțimea A.

Taian Preda

II. **a)** Suma a 63 numere naturale nenule este 2015.
Arătați că există printre aceste numere, două egale.

b) Fie $3<a<b<c$; a,b,c numere prime cu proprietatea că $2b=a+c$. Să se arate că $6/b-a$ și $6/c-b$. Dați un exemplu de numere a,b,c care verifică enunțul.

Liviu Oprişescu

III. Se consideră unghiurile adiacente A_1OA_2, A_2OA_3, A_3OA_4,...., A_nOA_{n+1} astfel încât $m(< A_1OA_2)=1grad$, $m(< A_2OA_3)=2grade$, $m(< A_3OA_4)=4grade$, ... $m(< A_nOA_{n+1})=2^{n-1}grade$.

a) Găsiți cea mai mare valoare a lui n astfel încât suma măsurilor celor n unghiuri să fie mai mică de 360°.

b) Fie OB semidreapta opusă bisectoarei $< A_1OA_n$ cu n determinat la punctual a). Aflați $k\in N^*$ astfel încât B să aparțină interiorului $< A_kOA_{k+1}$.

Petruş Alexandrescu, Traian Preda

IV. Să se stabilească poziția punctelor A,B,C,D pe o dreaptă d știind că: $|CD|=3^{32}$, $|CA|=2^{48}$, $|CB|=9^{18}$ și că $|BD|$ este divizibil prin 41 iar $|AD|$ este divizibil prin 5.

Traian Preda

Punctaj: **I.** a) 4p; b1) 3p; b2) 2p; **II.** a) 4p; b)5p; **III.** a) 4p; b) 5p; **IV.** 9p.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează cu un punctaj cuprins între 1 și 10 puncte (la fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu).
Timp de lucru efectiv: 2 ore 30 min.

Concursul revistei Arhimede
Ediția a III-a. Etapa a II-a zonală.

Enunțuri subiecte clasa a VIII-a
25 febr. 2006

I. Fie numărul $n=\dfrac{\sqrt{70+30\sqrt{5}}}{8\sqrt{7+3\sqrt{5}}}\cdot\left(\sqrt{7-3\sqrt{5}}-\sqrt{7+3\sqrt{5}}\right)$

a) Stabiliți dacă numărul n este număr rațional.

b) Găsiți [n] și {n}, unde [n] reprezintă partea întreagă a lui n și {n} partea fracționară a lui n, adică {n}=n-[n].

Cristina Godeanu-Matei

II. Dacă x, y, z sunt numere reale positive astfel încât $x+y+z=1$, atunci are loc inegalitatea:

$$\sqrt{x+yz}+\sqrt{y+xz}+\sqrt{z+xy}\le 2$$

Titu Zvonaru, Bogdan Ioniță

III. Tetraedrul SABC are muchia SA perpendiculară pe planul (ABC). Punctele D, P, Q sunt proiecțiile punctului A pe dreptele BC, SB, respectiv SC iar punctele M și N sunt proiecțiile lui D pe SB, respective SC. Să se arate că dreptele MN și PQ sunt paralele.

Ştefan Smarandache

IV. Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, astfel încât $BC=a\sqrt{2}$, $A'C=2a$ și M, N proiecțiile punctului D pe AC, respective pe $A'C$, precum și P, Q proiecțiile punctului C' pe $B'D'$, respective BD'.

Demonstrați că:

a) $(DMN)\perp(AA'C)$

b) $(C'PQ)\perp(BDD')$

c) In conditiile de mai sus,este adevarat ca : $(DMN)\perp(C'PQ)$?

Ion Tiotioi, Constanța

Punctaj: I. a) 5p; b) 4p; **II.** 9p; **III.** 9p; **IV.** a) 3p; b) 3p; c) 3p.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează cu un punctaj cuprins între 1 și 10 puncte (la fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu).

Timp de lucru efectiv: 3 ore.