Colegiul Național “Constantin Carabella” Târgoviște

Concursul Județean de Matematică “Cezar Ivănescu”
Ediția a VIII-a, Târgoviște, 27 ianuarie 2007

CLASA A V-A

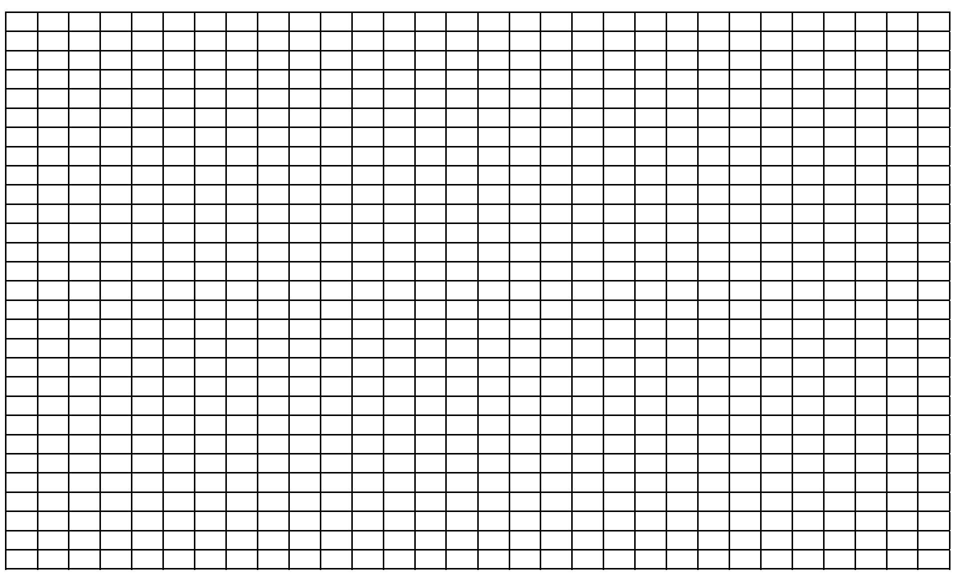
Problema 1
Se consideră numărul $a = 3^1 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{2007}$. Determinați ultima cifră a lui a, apoi demonstrați că a nu este pătrat perfect.

Damian Marinescu

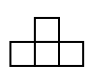
Problema 2
Demonstrați că numărul 17^n se poate scrie ca suma a trei pătrate perfecte nenule, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Carmen Stoicescu

Problema 3
Se consideră un dreptunghi cu dimensiunile 29cm şi 30cm, care se împarte în pătrățele de latură 1cm, ca în figura următoare:



Demonstrați că drepunghiul dat nu se poate acoperi cu plăcuțe de tipul



formate din 4 pătrățele de latură 1cm.

* * *

Timp de lucru: 2 ore

Colegiul Național "Constantin Carabella" Târgoviște

Concursul Județean de Matematică "Cezar Ivănescu"
Ediția a VIII-a, Târgoviște, 27 ianuarie 2007

CLASA A VI-A

Problema 1

Determinați numărul natural n și numerele prime a, b, p, știind că au loc următoarele două egalități: $a - b = p^n$ și $3a + b = 170$.

Carmen Stoicescu

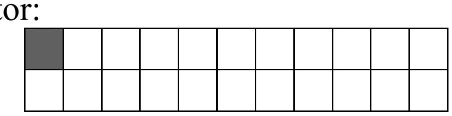
Problema 2

Determinați numerele $\overline{abcd}$, știind că numărul $\overline{1234abcd}$ se divide cu 56 și cu 65.

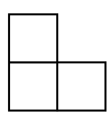
Damian Marinescu

Problema 3

Se consideră o figură cu 2 linii și 11 coloane, formată din pătrățele de latură 1cm, ca în desenul următor:



din care se elimină pătrățelul din stânga sus. Demonstrați că figura rămasă se poate acoperi cu plăcuțe formate din 3 pătrățele cu latura 1cm, ca în desenul următor:



Este posibilă o astfel de acoperire, dacă desenul inițial avea 33 de coloane în loc de 11 coloane?

* * *

Timp de lucru: 2 ore

Colegiul Național “Constantin Carabella” Târgoviște

Concursul Județean de Matematică “Cezar Ivănescu”
Ediția a VIII-a, Târgoviște, 27 ianuarie 2007

CLASA A VII-A

Problema 1

Determinați mulțimea $A = \left\{ \overline{abc} \mid \sqrt{\overline{abc}} + \sqrt{c} \in \mathrm{N} \right\}$.

* * *

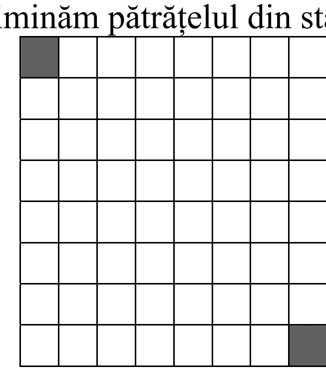
Problema 2

Fie triunghiul *ABC* cu *AB* = 3cm, *BC* = 6cm, *CA* = 4cm. Se consideră punctele $M \in (BC)$, $N \in (AC)$ astfel încât *BM* = 4cm, *AN* = 2cm și notăm $\{P\} = MN \cap AB$. Calculați lungimea segmentului *AP*.

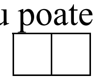
* * *

Problema 3

Se consideră o tablă de șah cu 8 linii și 8 coloane, formată din 64 de pătrățele de latură 1cm, din care eliminăm pătrățelul din stânga sus și pe cel din dreapta jos.



Demonstrați că figura rămasă nu poate fi acoperită cu plăcuțe de forma:



alcătuită din două pătrățele de latură 1cm.

* * *

Timp de lucru: 2 ore

Concursul Județean de Matematică "Cezar Ivănescu"
Ediția a VIII-a, Târgoviște, 27 ianuarie 2007

CLASA A VIII-A

Problema 1

Determinați suma cifrelor numărului $n = (10+1)(10^2+1)(10^4+1)(10^8+1)(10^{16}+1)$.

Damian Marinescu

Problema 2

Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de forma $f(x) = ax + b$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, având proprietatea că $f(x^2) - f^2(x) \geq \frac{1}{4}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

* * *

Problema 3

Cu ajutorul a 480 de cubulețe de muchie 1cm se construiește un paralelipiped dreptunghic de dimensiuni 6cm, 8cm, 10cm, apoi paralelipipedul se vopsește la exterior. Câte cubulețe vor avea trei fețe vopsite? Dar două fețe vopsite? Dar o față vopsită? Câte cubulețe rămân nevopsite?

Doru Pavelescu

Timp de lucru: 2 ore

Colegiul Național “Constantin Carabella” Târgoviște

Concursul Județean de Matematică “Cezar Ivănescu”
Ediția a VIII-a, Târgoviște, 27 ianuarie 2007

CLASA A IX-A

Problema 1

Cercul înscris într-un triunghi *ABC* intersectează laturile triunghiului în *A*’, *B*’, *C*’. Demonstrați că triunghiurile *ABC* şi *A’B’C’* au acelaşi centru de greutate dacă şi numai dacă triunghiul *ABC* este echilateral.

Cornel Stoicescu

Problema 2

Se consideră un punct *P* în interiorul unui triunghi *ABC* şi notăm cu *A*’, *B*’, *C*’ intersecțiile dreptelor *AP*, *BP*, *CP* cu laturile *BC*, *CA*, respectiv *AB* astfel încât are loc relația $\frac{AP}{PA'}+\frac{BP}{PB'}+\frac{CP}{PC'}=2007$. Calculați produsul $\frac{AP}{PA'}\cdot\frac{BP}{PB'}\cdot\frac{CP}{PC'}$.

* * *

Problema 3

Fie $x\in\mathrm{R}$ un număr fixat. Arătați că dacă are loc relația $\left[\frac{1}{2}-nx\right]+\left[\frac{1}{2}+nx\right]=0$, pentru orice $n\in\mathrm{Z}^*$, atunci $x\in\mathrm{R}-\mathrm{Q}$ şi reciproc.

Cornel Stoicescu

Timp de lucru: 2 ore

Colegiul Național "Constantin Carabella" Târgoviște

Concursul Județean de Matematică "Cezar Ivănescu"
Ediția a VIII-a, Târgoviște, 27 ianuarie 2007

CLASA A X-A

Problema 1

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(f(x)) = f(x) - x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) Demonstrați că $(f \circ f \circ f)(x) = -x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Demonstrați că *f* este inversabilă şi $f(x) + f^{-1}(x) = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Cornel Stoicescu, Cristinel Mortici

Problema 2

a) Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ şi $x, y \in \mathbb{R}^*$ cu $x + y \neq 0$. Demonstrați că

$$\frac{|z_1|^2}{x} + \frac{|z_2|^2}{y} - \frac{|z_1 + z_2|^2}{x+y} = \frac{|yz_1 - xz_2|^2}{xy(x+y)}$$ (Identitatea lui Bergström)

b) Demonstrați că în orice triunghi *ABC* cu mediana *AM* are loc inegalitatea

$\frac{AB^2}{x} + \frac{AC^2}{y} \geq \frac{4AM^2}{x+y}$, oricare ar fi $x, y \in (0,\infty)$.

Cristinel Mortici, Cornel Stoicescu

Problema 3

Demonstrați că pentru orice $x, y, z, t \in (0,\infty)$, are loc inegalitatea

$$\frac{x}{y} + \sqrt{\frac{y}{z}} + \sqrt[3]{\frac{z}{t}} + \sqrt[4]{\frac{t}{x}} > 3.$$

Călin Burduşel

Timp de lucru: 2 ore

Colegiul Național "Constantin Carabella" Târgoviște

Concursul Județean de Matematică "Cezar Ivănescu"
Ediția a VIII-a, Târgoviște, 27 ianuarie 2007

CLASA A XI-A

Problema 1

Calculați următoarea limită: $\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right)^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}$.

Cornel Stoicescu

Problema 2

Fie șirul $x_{n+1} = x_n\sqrt{4+x_n^2}$, pentru orice $n \in \mathrm{N}$, cu $x_0 = e - e^{-1}$. Calculați $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x_n}{2^n}$.

Cornel Stoicescu, Cristinel Mortici

Problema 3

Se consideră două matrice inversabile $A, B \in M_3(\mathrm{R})$, care comută între ele, cu proprietatea că $A^3 = B^3$. Demonstrați că $\det(A-B)=0$ și dacă în plus există un număr natural *n* nedivizibil cu 3 astfel încât $A^n = B^n$, atunci $A - B = 0_3$.

*** * ***

Timp de lucru: 2 ore

Colegiul Național “Constantin Carabella” Târgoviște

Concursul Județean de Matematică “Cezar Ivănescu”
Ediția a VIII-a, Târgoviște, 27 ianuarie 2007

CLASA A XII-A

Problema 1

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Calculați următoarea integrală nedefinită: $\int \frac{x^{3n-1} - x^{n-1}}{x^{4n} - x^{2n} + 1} \mathrm{d}x, \quad x \in (0, \infty)$.

Cornel Stoicescu

Problema 2

Calculați următoarea limită: $\lim\limits_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sin \frac{i}{n^2} \sin \frac{i^2}{n^2}$.

Cornel Stoicescu, Cristinel Mortici

Problema 3

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că $f(f(x)) = f(x) - x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Arătați că mulțimea $G = \{ f^{[n]} \mid n \in \mathbb{N}^* \}$ are structură de grup ciclic finit în raport cu operația de compunere a funcțiilor, unde am notat $f^{[n]} = f \circ f \circ \ldots \circ f$ (de n ori).

Cornel Stoicescu, Cristinel Mortici

Timp de lucru: 2 ore