Olimpiada –faza locala, Argeş 25 .02 2006

Clasa a V-a

1. Fie n numărul numerelor naturale a cu proprietatea $9^{12} \leq a \leq 9^{13}$ şi m numărul numerelor naturale b cu proprietatea $9^{38} < b \leq 2^{39}$.
   a) Demonstraţi că n este cub perfect şi că m este pătrat perfect.
   b)Demonstraţi că n>m.

Nicolae Păun,Târgovişte

2. Arătaţi că: a)$(4^{2005}+5^{2005}+6^{2005}) \vdots 5$ b)$(4^{2006}+5^{2006}+6^{2006}-2) \vdots 5$ c)$(4^{2005}+5^{2006}+6^{2007}) \vdots 5$

Elena Boghe,Târgovişte

3 a) Aflaţi restul £mpărţirii numărului 2^{22}la 3.
b)Aflaţi câtul £mpărţirii numărului $7 \cdot 2^{2007}$ la $5 \cdot 2^{2006}$

Damian Marinescu,Târgovişte

4. a) Determinaţi $\overline{abc}$ astfel £ncât $2^0 \cdot a^3+2^1 \cdot b^3+2^2 \cdot c^3 = 66$
b) Determinaţi $\overline{abc}$ astfel £ncât $6a+7b+8c=678-9a^3$

Damian Marinescu, Târgovişte

Clasa a VI-a

1. Fie a,b,c cifre nenule.
   a)Demonstraţi că $\frac{\overline{ab}+c}{\overline{bc}+a} = \frac{\overline{bc}+a}{\overline{ca}+b} = \frac{\overline{ca}+b}{\overline{ab}+c}$ dacă şi numai dacă a=b=c.
   b) Demonstraţi că $\frac{\overline{ab}+c}{a} = \frac{\overline{bc}+a}{b} = \frac{\overline{ca}+b}{c}$ dacă şi numai dacă a=b=c

Elena Boghe,Târgovişte

2. Connsiderâm următorul şir de rapoarte egale £n care valolrea comună a rapoartelor este număr natural, iar numerele a, b, x sunt naturale: $\frac{2a+b}{a-1} = \frac{2x+1}{x-2} = \frac{4a+b}{a+3}$.Aflaţi a, b, x.

Nicolae Păuna,Târgovişte

3. Fie a, b, c, d `N* astfel £ncât numerele $\frac{a^3}{bcd}$, $\frac{b^3}{cda}, \frac{c^3}{dab}, \frac{d^3}{abc}$ sunt naturale.

Demonstraţi că : a) $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$
b) $a^{2004}+b^{2004}+c^{2004}+d^{2004}=4(abcd)^{501}$
c) $a^{2005}+b^{2005}+c^{2005}+d^{2005}=(abcd)^{501}(a+b+c+d)$

Călin Burduşel, Târgovişte

4.a) Fie A, B, C, D puncte coliniare £n acesta ordine astfel £ncât 3AB=4CD şi 4AC=5BD
b) Aflaţi măsurile unghiurilor ØAOB, ØBOC, ØCOD, ØDOA £n jurul punctului O cu proprietatea că 3·m(ØAOB)=4·m(ØCOD), 4·m(ØAOC)=5·m(ØBOD) şi m(ØAOD)=7·m(ØBOC)

Damian Marinescu, Târgovişte

Clasa a VII-a

1. a) Considerăm suma S= $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+.....+\frac{1}{2006\cdot 2007}$.

b) Determinați x astfel £ncât $\left|x-\frac{1}{2}\right|$ + $\left|x+\frac{1}{6}\right|$ + $\left|x-\frac{1}{12}\right|$ + $\left|x+\frac{1}{20}\right|$ = [illegible]

c) Demonstrați că pentru orice număr rațional x, are loc inegalitatea:

$\left|x-\frac{1}{1\cdot 2}\right|$ + $\left|x+\frac{1}{2\cdot 3}\right|$ + $\left|x=\frac{1}{3\cdot 4}\right|$ +.......+ $\left|x-\frac{1}{2005\cdot 2006}\right|$ + $\left|x+\frac{1}{2006\cdot 2007}\right|$ $\geq \frac{2006}{2007}$

Elena Boghe,Târgoviște

2. a) Demonstrați că numărul $\sqrt{2^{2007}=2^{2005}-2006}$ este irațional

b) Demonstrați că numărul $\sqrt{n^{2007}-n^{2005}-2006}$ este irațional. oricare ar fi n`N

Damian Marinescu, Târgoviște

3. P rin punctul E situat pe diagonala AC a paralelogramului ABCD se duce o paralelă la BD care intersectează dreptele AB, BC, CD, DA £n punctele M,N,P,Q. Demonstrați că:

a) MQ+PN= constant

b) AM·CN=AQ·CP

Damian Marinescu, Târgoviște

4. Pe laturile neparalele AD și BC ale unui trapez oarecare ABCD se construiesc £n exterior pătratele ADEF și BCGH. Arătați că mediatoarea segmentului [CD] trece prin mijlocul segmentului [EG]

* * *

Clasa a VIII-a

1. Fie x, y`R asrfel £ncât $x^2+y^2-3(x-y)+4,25=0$. Arătați că a) $|x-y|\geq 1$. b) $|x^3-y^3|$ ≤ 7.

Nicolae Păuna, Târgoviște

2. a) Fie x, y, x>0. Demonstrați că $x^3+y^3+z^3=\sqrt{2}\left(\frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y^2z^2}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{x^2z^2}{\sqrt{x^2+z^2}}\right)$ dacă și numai dacă x=y=z

Călin Burdușel,Târgoviște

3. Fie ABCA`B`C` o prismă triunghiulară regulată £n care AB=2 cm și AA`=3 cm

a) Dacă M`(CC`), determinați CM maxim astfel £ncât Δ AMB` să fie dreptunghic £n M.

b) Dacă n`(BB`) astfel £ncât BN=1 cm, determinați cosinusul unghiului dintre planele (ANC) și (ABC)

Damian Marinescu, Târgoviște

4. De aceeași parte a planului unui dreptunghi ABCD cu AB=a $\sqrt{2}$ cm și BC=a cm se ridică perpendicularele £n A și C pe plan pe care se iau punctele V, respective T astfel £ncât AV=a cm și TC= [illegible] cm. Fie M, N mijloacele laturilor CD, respectiv AB Demonstrați că (VDN)⊥(TBN).