Olimpiada de matematică

UNIVERSITATEA DIN CRAIOVA Inspectoratul Şcolar Județean Dolj
FACULTATEA DE MATEMATICĂ – INFORMATICĂ

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală , 18 Februarie ,2006

CLASA a V a

Subiectul 1 . Fie $A = 1 + 2 + \ldots + n$. Să se determine valoarea numărului natural nenul n astfel încât A să fie un număr de trei cifre , toate egale .

Subiectul 2 .

a) Arătați că nu există pătrate perfecte de forma 6k + 2 , oricare ar fi k, număr natural .

b) Arătați că numărul $N = \boxed{\overline{xyz}} + \boxed{\overline{yxx}} + \boxed{\overline{zzy}}$ nu poate fi pătrat perfect , oricare ar fi cifrele x, y, z $\in$ { 1,2,...,9 }.

Subiectul 3 . În vacanța de iarnă s-a organizat o excursie la care au participat 814 elevi . Transportul a fost organizat cu mai multe tipuri de autocare care aveau 20 ,36, 42 şi 48 de locuri . Numărul autocarelor cu 36 de locuri este dublu față de numărul celor cu 42 de locuri .Alegerea autocarelor a fost făcută astfel încât în fiecare maşină să nu rămână nici un loc liber , să fie folosite toate cele 4 tipuri de autocare şi numărul total al acestora să fie cât mai mic posibil .
Stabiliți câte autocare din fiecare fel au fost folosite pentru transportul elevilor.

Subiectul 4. Numerele naturale m , n , p dau la împărțirea cu numerele n , p , m resturile 7 , 11 şi respectiv , 13 . Să se arate că :

a) m > n .

b) Dacă în plus , n > p , găsiți trei numere prime m, n , p care să îndeplinească condițiile din enunț .

Notă : Timp de lucru 3 ore .
Toate subiectele sunt obligatorii.

UNIVERSITATEA DIN CRAIOVA Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
FACULTATEA DE MATEMATICĂ – INFORMATICĂ

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Locală , 18 Februarie ,2006

CLASA a VI a

Subiectul 1. a) Să se afle numărul natural n pentru care 2 + 2 şi 3 + 1 sunt simultan divizibile cu 10 .

b) Demonstraţi că dacă n Є **N** , n $\neq$ 1 şi x , x ,..., x Є **N** astfel încât

$$\frac{2x_1}{x_2} = \frac{3x_2}{2x_3} = \ldots = \frac{nx_{n-1}}{(n-1)x_n} = \frac{x_n}{nx_1}$$

, atunci $x_1 + \ldots + x_n$ se divide la $\frac{n(n+1)}{2}$.

Subiectul 2. a) Un număr natural se măreşte cu cu p% iar rezultatul se micşorează tot cu p%. Numărul obţinut astfel este cu 9% mai mic decât cel iniţial . Să se determine procentul p .

b) Diferenţa a două numere prime este 25% din suma lor . Care sunt numerele ?

Subiectul 3. Dacă numărul A se împarte în părţi direct proporţionale cu numerele a,b şi c, se obţin rezultatele corespunzătoare x, y şi z , iar dacă se împarte în părţi invers proporţionale cu aceleaşi numere a, b şi c , se obţin rezultatele m , n şi p .

Să se afle numerele m , n , p ştiind că a, b, c sunt numere prime (a < b < c) iar xyz = 139755.

Subiectul 4. Fie MAB şi MCD două triunghiuri dreptunghice isoscele , congruente (cu *m* (AMB) = *m* (CMD) = 90) astfel încât (MC este interioară AMB. Fie { O } = AB ∩ CD şi { E } = AC ∩ BD . Să se arate că :

a) AC = BD ;

b) Δ AED este dreptunghic isoscel ;

c) AO = DO ;

d) M , O , E sunt coliniare .

Notă : Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii.

UNIVERSITATEA DIN CRAIOVA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ – INFORMATICĂ

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Locală , 18 Februarie ,2006

CLASA a V III a

Subiectul 1 . Să se determine numerele a ,b Є **R** / { 0 } ştiind că $\frac{a+1}{b+1} + \frac{a+2}{b+2} + \frac{a+3}{b+3} = 3$ şi că a + b = 1 .

V. Slesar

Subiectul 2 . Se consideră numerele k , n Є **N .** Fie

$$A = (\sqrt{k} + \sqrt{k\,\text{[illegible]}})(\sqrt{k\,\text{[illegible]}} - \sqrt{k}) \cdot \ldots \cdot (\sqrt{kn} + \sqrt{kn\,\text{[illegible]}})(\sqrt{kn\,\text{[illegible]}} - \sqrt{kn}) ,$$

$$B = (\sqrt{k} - \sqrt{k\,\text{[illegible]}})(\sqrt{k\,\text{[illegible]}} + \sqrt{k}) \cdot \ldots \cdot (\sqrt{kn} - \sqrt{kn\,\text{[illegible]}})(\sqrt{kn\,\text{[illegible]}} + \sqrt{kn})$$

Să se demonstreze că 0< A < 1 şi că B > 1.

M.Popescu

Subiectul 3 . Fie ABC un triunghi echilateral şi d , d perpendicularele pe planul triunghiului respectiv în B şi C.

a) Dacă B este un punct variabil pe d , să se arate că planele perpendiculare în A pe dreptele AB trec printr-o dreaptă fixă.

b) Fie B Є d şi C Є d astfel încât dreptele AB şi AC sunt perpendiculare.
Să se arate că 2 || BB || · || CC || = || AB || .

M.Popescu

Subiectul 4 . Fie ABCD un trapez cu AB || CD şi || AB|| + || CD|| = || AD|| . Pe planul (ABCD) se ridică perpendiculara în punctul A pe care se ia punctul M. Fie N mijlocul segmentului BC .
Să se arate că MN DN .

V.Slesar

NOTĂ : Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii .
Fiecare subiect va fi notat cu note între 1 şi 10 .

UNIVERSITATEA DIN CRAIOVA Inspectoratul Şcolar Județean Dolj
FACULTATEA DE MATEMATICĂ – INFORMATICĂ

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală , 18 Februarie ,2006

CLASA a V II a

Subiectul 1 .
Sa se gaseasca primele 200 de zecimale ale numarului

$$a= (\sqrt{2006}+[\sqrt{2006}])^{2006}.$$

([x] reprezinta partea intreaga a numarului x)

(***)

Subiectul 2 . Se dau trei numere strict pozitive x_1, x_2, x_3, care satisfac conditiile :

$$x_1x_2x_3 \Rightarrow \text{ si } x_1+x_2+x_3<\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}.$$

Sa se demonstreze ca :
a) nici unul din numere nu este egal cu 1 ;
b) exact unul dintre acestea este mai mic decat 1.

(***)

Subiectul 3.
Se considera patrulaterul convex ABCD, care nu are laturile opuse paralele. Pe fiecare latura a lui se construieste cate un punct astfel : pe latura (AB) se construieste punctul T ca fiind intersectia dreptelor AB si A'B', unde A' si B' sunt punctele in care paralele duse din B, respectiv A la dreapta CD, intersecteaza dreptele AD si BC.
Sa se demonstreze ca patrulaterul ale carui varfuri sunt cele patru puncte astfel construite este paralelogram.

(***)

Subiectul 4.
Se considera patrulaterul convex ABCD si punctele P, Q, R, S respectiv pe laturile (AB), (BC), (CD), (DA).
Fie A, A_A, A_B, A_C, A_D respectiv ariile patrulaterului ABCD si triunghiurilor SAP, PBQ, QCR, RDS.
Sa se demonstreze ca :

$$A^4 \geq 2^{12} A_A A_B A_C A_D \qquad (1)$$

si sa se determine o conditie necesara si suficienta in care are loc egalitate in relatia (1).

(***)

NOTĂ : Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii .
Fiecare subiect va fi notat cu note între 1 şi 10 .