OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 12 FEBRUARIE 2006

CLASA A V-A

1. Se consideră un număr natural cu toate cifrele diferite între ele şi care are prima cifră 1. Se ia această primă cifră şi se mută la sfârşitul numărului considerat. Astfel, se obține un număr natural de trei ori mai mare decât primul. Care este numărul natural inițial?

Problemă propusă de prof. Mariana Anton

2. Arătați că numărul natural $1^{2006}+2^{2006}+3^{2006}+...+2005^{2006}+2006^{2006}+2$ nu poate fi pătrat perfect.

Problemă selectată şi prelucrată de prof. Laura Marin

3. Prin împărțirea numerelor naturale $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{ca}$, scrise în baza 10, la acelaşi număr natural nenul, se obțin câturile b, c, respectiv a şi resturile c, a, respectiv b. Aflați împărțitorul şi arătați că numărul $\overline{abc}$ este multiplu de 111.

Problemă selectată şi prelucrată de prof. Laura Marin

4. Să se afle numărul natural de patru cifre $\overline{abcd}$ ştiind că acesta se poate scrie sub forma $\overline{abcd}=2\cdot\overline{xy}\cdot\overline{zt}$, unde x, y, z, t sunt cifre impare, x < z < y < t şi x + y = a + b + c + d. Numerele sunt scrise în baza 10.

Problemă propusă de prof. Tatiana Saulea

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 12 FEBRUARIE 2006

CLASA A VII-A

1. Aflați valoarea numărului natural nenul n pentru care:

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+...+\frac{n}{(n+1)!}=\frac{2006!-1}{2006!}$$

unde n! = 1 · 2 · … · n, $n\in N^*$.

Problemă propusă de prof. Dorina Andrei – Nicoară

2. Determinați numărul natural nenul de trei cifre $\overline{abc}$, scris în baza 10, știind că este pătrat perfect și că $\sqrt{\overline{abc}+1320\sqrt{\overline{abc}}}=\overline{abc}$.

Problemă propusă de prof. Rodica și Dumitru Bălan

3. a) Să se determine cel mai mare divizor comun al numerelor a = $\underbrace{11...11}_{4k \text{ cifre de } 1}$ și b = 11111111, unde k este număr natural impar.

b) Aceeași cerință pentru numerele a = $\underbrace{11...11}_{n \text{ cifre de } 1}$ și b = $\underbrace{11...11}_{m \text{ cifre de } 1}$, m, n ∈N*.

Numerele a și b sunt scrise în baza 10.

Problemă propusă de prof. Constantin Ursu

4. Fie pătratul ABCD. Se consideră punctele N∈(AB), M∈(AC) astfel încât $\frac{AN}{AB}=k$, $\frac{CM}{AC}=\frac{k}{2}$, k >0, k∈R. Să se determine numărul k astfel încât $m(\sphericalangle DMN)=90^0$.

Problemă propusă de prof. Petre Bătrânețu

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 12 FEBRUARIE 2006

CLASA A IX-A

1. Fie numărul A = $\left(\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+...+\frac{2004}{2005!}\right)\cdot\frac{2004!}{2005!-1}$, unde n! =1 · 2 · 3 · … · n, n∈N*. Stabiliți dacă A^{-1} ∈N.

Problemă propusă de prof. Petre Bătrânețu

2. Se consideră şirul de numere reale $\left(a_n\right)_{n\in N^*}$, cu proprietatea că $a_1>1$ şi $a_{n+1} - a_n \geq 2$, pentru orice n∈N*. Să se demonstreze că pentru orice număr natural n, n ≥3, dacă notăm S_n = $=a_1+a_2+...+a_n$ şi S_{n+1}= $a_1+a_2+...+a_n+a_{n+1}$, în intervalul $\left[S_n, S_{n+1}\right]$ există cel puțin un număr natural pătrat perfect.

Problemă selectată de prof. Constanța Gusta

3. Se consideră o funcție f:R→R cu proprietatea că $f\left(2|x-2|+3|x-3|-4\right)=$ $=2\left|f\left(x\right)-2\right|+3\left|f\left(x\right)-3\right|-4$, pentru orice x∈R. Să se arate că ecuația $f\left(f\left(x\right)\right)=x$ are cel puțin o soluție reală.

*** * ***

4. Fie ABCD un patrulater convex. Să se determine mulțimea punctelor M din planul patrulaterului ABCD cu proprietatea că modulul vectorului $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}+5\overrightarrow{MD}$ are valoare constantă.

Problemă propusă de prof. Constantin Ursu

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 12 FEBRUARIE 2006

CLASA A XI-A

1. Fie $n \in N^*$ şi M mulţimea matricelor pătratice de ordinul n, inversabile în $M_n(R)$, având elementele în mulţimea $\{1, 2, 3, \ldots, 2006\}$. Să se arate că mulţimea M are un număr par de elemente.

Problemă propusă de prof. Marian Baroni

2. Se consideră şirul $(x_n)_{n\in N}$, cu $x_0 \in R$ şi $x_{n+1} = x_n + e^{-x_n}$, $\forall$ $n \in N$. Determinaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{\ln n}$.

Problemă propusă de prof. Felix Arhire

3. Fie a > 1 un număr real fixat. Pentru fiecare număr natural nenul n, notăm cu k(n) cel mai mic număr natural k pentru care $(n+1)^k \geq a \cdot n^k$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k(n)}{n}$.

* * *

4. Fiind dată funcţia f : [a, b] →R, să se arate că, dacă există c∈(a, b) astfel încât f are limite laterale infinite în c, atunci funcţia f nu este monotonă pe [a, b].

* * *

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 12 FEBRUARIE 2006

CLASA A XII-A

1. Se consideră şirul de numere reale $(a_n)_{n\in N^*}$ dat prin $a_n = \sum_{k=0}^{3n} \frac{4k}{3n\sqrt{4k^2+9n^2}}$. Să se determine $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Problemă propusă de prof. Iulian Ştiubianu

2. Să se determine funcțiile continue f: $(0, +\infty)\to R$, cu proprietatea că $f(x) \neq 0$, $\forall$ $x\in(0, +\infty)$, care verifică relația:

$$\int_{x^2}^{x^3} f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{1}^{x^2} f(t)\,dt,\ \forall\ x\in (0, +\infty).$$

Problemă propusă de prof. Mihai Totolici

3. Fie H un subgrup al unui grup G astfel încât G – H are 2006 elemente.

a) Să se arate că G are cel mult 4012 elemente;
b) Să se construiască un exemplu de subgrup H cu 2006 elemente al unui grup cu exact 4012 elemente.

Problemă propusă de prof. Marian Baroni

4. a) Fie $n\in N$ de forma $n = 4k + 3$, $k\in N$. Să se arate că există un număr prim p, p divizor al numărului n, pentru care:

1) ecuația $x^2 + \hat{1} = \hat{0}$ nu are soluții în Z_p.
2) dacă $a^2 + b^2 = \hat{0}$ în Z_p, atunci $a = b = \hat{0}$

b) Să se rezolve, în Z, ecuația $a^2 + b^2 = 11858$.

Problemă propusă de prof. Vasile Popa

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru 3 ore.