INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN SIBIU

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ, 26.01.2008
Clasa a V-a

1. **(7p)** a) Arătați că:
$$\boxed{(1+3+5+\ldots+2007):1008016=(2+4+6+\ldots+2008):1009020}.$$
Liviu Ardelean, Sibiu

2. **(4p)** a) Arătați că:
$$\boxed{1010001_{(2)}=1001^2_{(2)}};\ \boxed{100100001_{(2)}=10001^2_{(2)}}.$$
(3p) b) Aflați pătratul cărui număr, scris în baza zece, este numărul $\boxed{1000010000001_{(2)}}$ şi arătați că el este divizibil cu 169.
Monica Guita, Sibiu

3. Făt-Frumos culege o floare nemaivăzută cu 6 petale, pentru a o duce Ilenei Cosânzeana. În timpul călătoriei observă că zilnic i se dublează numărul de petale, iar apoi îi cad nişte petale: 1 petală în prima zi, 4 petale în a doua zi, 7 în a treia zi ş.a.m.d. Ştiind că ajunge la Ileana Cosânzeana în a opta zi, aflați:
(3p) a) Câte petale ar avea floarea, dacă n-ar cădea nici o petală?
(4p) b) Câte petale are floarea, când o primeşte Ileana Cosânzeana?
Cristian Săuchea, Sibiu

4. **(7p)** Determinați cifrele a şi b pentru care numerele $\boxed{\overline{ab}+\overline{ba}}$ şi $\boxed{\overline{ab}-\overline{ba}}$ sunt simultan pătratele unor numere naturale.
Gheorghe Bîrză, Tălmaciu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru: 2 ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN SIBIU

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ, 26.01.2008
Clasa a VI-a

1. **(3p)** a) Găsiți numerele prime de 3 cifre formate din cifrele 1, 4, 5.
   (4p) b) Determinați numerele naturale *n*, *p*, ştiind că numărul $a=2^n\cdot 3^p\cdot 5^3$ se divide cu 216 şi că numărul de divizori ai lui *a* este 120.

   Pavel Toader, Sibiu

2. **(7p)** Aflați câte elemente conține mulțimea $M=\left\{\frac{n+101}{n+10}\in N \mid n\in N\right\}$.

   Gazeta Matematică

3. **(7p)** Pe dreapta OM luăm, în acelaşi sens, punctele: A_1 de două ori mai depărtat de O decât M, A_2 de trei ori mai depărtat de O decât M, A_3 de patru ori mai depărtat de O decât M etc. Aflați lungimea segmentului [OM], ştiind că lungimea lui [OM] este număr natural şi $OA_1+OA_2+OA_3+\ldots+OA_n=45\ cm$.

   Liviu Ardelean, Sibiu

4. Se consideră unghiurile $<A_1OA_2$, $<A_2OA_3$, $<A_3OA_4$, ... , $<A_nOA_{n+1}$, adiacente două câte două, care au respectiv măsurile:
   $\frac{1}{2}\cdot 172^o12'$; $\frac{1}{6}\cdot 172^o12'$; $\frac{1}{12}\cdot 172^o12'$; ... ; $\frac{1}{n(n+1)}\cdot 172^o12'$.
   (2p) a) Calculați măsurile unghiurilor A_2OA_3 şi A_5OA_6.
   (5p) b) Determinați $n\in$ **N**, astfel încât $m(<A_1OA_{n+1})=$ ٩٤٧١٠'.

   Monica Guita, Sibiu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru: 2 ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN SIBIU

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ, 26.01.2008
Clasa a VII-a

1. 5 kilograme de ciocolată se taie în 50 de bucăți de tip A(60 grame), B(100 grame) şi C(250 grame).

(4p) a) Câte bucăți de tip A, B, respectiv C se pot obține?

(3p) b) Dacă se obțin 30 de bucăți de tip A, 12 bucăți de tip B şi 8 bucăți de tip C, acestea se amestecă şi se distribuie, la întâmplare, la 50 de copii. Care este probabilitatea ca primii doi copii să primească câte o bucată de tip A?

Simona Dumitrescu, Sibiu

2. Se dau numerele pozitive $x_1, x_2, x_3, ..., x_{10}$, astfel încât $x_١ + x_٢ + ... + x_{١٠} = ٢٥١٠$.

(2p) a) Dacă m_a este media aritmetică a numerelor $x_1, x_2, x_3, ..., x_{10}$, arătați că

$$\frac{m_a}{٢٠٠٨} > 0,01.$$

(5p) b) Dacă $S = \frac{x_١}{٢٠٠٨ - x_٢} + \frac{x_٢}{٢٠٠٨ - x_٣} + ... + \frac{x_٩}{٢٠٠٨ - x_{١٠}} + \frac{x_{١٠}}{٢٠٠٨ - x_١}$,

demonstrați că:

$$7 < S < 8.$$

Vasile Berghea, Avrig

3. Se dă paralelogramul ABCD. Dreapta d intersectează dreptele AB, BC, CD şi DA, respectiv în punctele M, N, P şi Q.

(4p) a) Arătați că $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PD} \cdot \frac{QD}{QA} = 1$.

(3p) b) Dacă O este centrul de simetrie al paralelogramului şi *QM=MP=PN*, aflați cât la sută din aria paralelogramului ABCD reprezintă aria triunghiului DOM.

Gazeta Matematică

4. Se dă triunghiul ABC, în care măsurile unghiurilor A, B şi C sunt direct proporționale respectiv cu numerele 3, 2 şi 1.

(3p) a) Arătați că *BC=2AB*.

(4p) b) Dacă O este mijlocul laturii [BC], găsiți poziția punctului E $\in$ (AC), astfel încât suma *BE+EO* să ia valoare minimă.

Simona Dumitrescu, Sibiu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru: 3 ore.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN SIBIU

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ, 26.01.2008
Clasa a VIII-a

1. **(3p)** a) Demonstrați că $\left(\frac{x}{y}-1\right)^2+\left(\frac{y}{x}+1\right)^2 \geq 3, \quad \forall x, y \in R^*$.
   (4p) b) Fie *a, b* $\in R$, astfel încât $a^2(a-2b)=b^2(b-2a)$. Arătați că *a*=*b*.

Gazeta Matematică

2. **(2p)** a) Arătați că $a^2-a+1>0, \forall a \in R$.
   (5p) b) Fie $a_1, a_2, \ldots a_n \in R$. Dovediți că cel mai mare dintre numerele $a_1^2-a_2+1, a_2^2-a_3+1, \ldots, a_{n-1}^2-a_n+1, a_n^2-a_1+1$ nu poate fi mai mic decât $\frac{3}{4}$.

Petru Vlad, Sibiu

3. **(7p)** Fie *ABCD* un romb cu *A', B', C', D'* $\notin (ABC)$. Dacă $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$, *AA'*= 5 cm, *BB'*=3 cm, *CC'*=8 cm, *DD'*=10 cm, arătați că *A', B', C', D'* sunt coplanare.

***

4. Fie ABCD un paralelogram cu unghiul ascuțit de 45°, AB=5 cm şi aria de 20 cm^2, iar P mijlocul înălțimii paralelogramului dusă din D. În punctul R, simetricul lui P față de AD, se ridică perpendiculara RM pe planul paralelogramului, RM=$\frac{7\sqrt{2}}{2}$ cm.
   Aflați:
   (5p) a) distanța de la punctul R la planul (MBC).
   (2p) b) tangenta unghiului dintre dreapta MC şi planul (ABC).

Gheorghe Floarea, Sibiu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru: 3 ore.