Concursul național de matematică “Alexandru Myller”
Ediția a III-a, martie 2005
Clasa a VII-a

1. Să se determine $n \in \mathbf{N}$ astfel încât $\sqrt{4n^2 + 13n + 4} \in \mathbf{Q}$.

***

2. Fie $ABCD$ un paralelogram şi punctul O situat în interiorul triunghiului ABD. Considerăm $OQ \parallel AD$, $Q \in [CD]$, $\{M\} = OQ \cap BD$, $OP \parallel AB$, $P \in [BC]$, $OP \cap BD = \{N\}$. Arătați că $\mathcal{A}_{OMN} = \mathcal{A}_{MQD} + \mathcal{A}_{BPN}$ dacă şi numai dacă segmentele $[MN]$, $[MD]$ şi $[NB]$ sunt laturile unui triunghi dreptunghic cu ipotenuza $[MN]$.

Petru Asaftei

3. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic şi H ortocentrul său. Notăm cu M mijlocul segmentului $[BC]$ şi cu N mijlocul segmentului $[AH]$. Demonstrați că $MN=BC$ dacă şi numai dacă $m\left(\hat{A}\right) = 30^{\circ}$.

Adrian Zanoschi

4. Fie $a, n \in \mathbf{N}^*$. Arătați că există o infinitate de valori $b \in \mathbf{N}$ astfel încât
a / b; $a + 1 / b + 1$; …; $a + n / b + n$.

Gheorghe Iurea

Concursul național de matematică “Alexandru Myller”
Ediția a III-a, martie 2005
Clasa a VIII-a

1. Pentru $n \in \mathbf{N}^*$, considerăm numărul $N(n) = n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)(n+4) + 120$.
a) Arătați că $N(n)$ se divide cu $(n + 5)$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$.
b) Arătați că există $n \in \mathbf{N}^*$ astfel încât numărul $\frac{N(n)}{n}$ să fie pătrat perfect.

Artur Bălăucă, Doru Turbatu

2. Fie a un număr real pozitiv, fixat. Considerăm expresia
$E(x; y) = \frac{\sqrt{a-x} - \sqrt{a+x}}{\sqrt{a-y} + \sqrt{a+y}}$, unde x şi y sunt numere reale care verifică relația: $x^2 + y^2 = a^2$.
Determinați minimul şi maximul expresiei $\left(E(x; y)\right)^n$, pentru $n \in \{1, 2, 3\}$.

Dan Popescu

3. Fie unghiul diedru $(\alpha; \beta)$ cu măsura mai mica de 45°. In interiorul diedrului considerăm punctele fixe A şi B. Fie C simetricul lui B față de α, iar D simetricul lui C față de β. Notăm $\{E\} = AD \cap \beta$ şi $\{F\} = EC \cap \alpha$. Să se arate că, oricare ar fi punctele M şi N, $M \in \beta$, $N \in \alpha$, avem $AE + EF + FB \leq AM + MN + NB$.

Petru Asaftei

4. Arătați că pentru orice $n \geq 2$, $n \in \mathbf{N}$ există $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ astfel încât
$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 - a_1 - 2a_2 - \ldots - na_n = 0$.

Gheorghe Iurea

Concursul național de matematică “Alexandru Myller”
Ediția a III-a, martie 2005
Clasa a IX-a

1. Se consideră numerele reale a, b, c diferite de – 1 cu $abc = 1$. Să se arate că dacă
$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=\frac{3}{2},$$
atunci unul din numerele a, b, c este egal cu 1.

Gabriel Marsanu, Andrei Nedelcu

2. Fie ABC un triunghi de laturi a = BC, b = CA şi c = AB. Un punct P interior triunghiului are proprietatea că pentru orice dreaptă d ce trece prin P şi intersectează dreptele AB şi AC în punctele distincte E respectiv F avem
$$\frac{1}{AE}+\frac{1}{AF}=\frac{a+b+c}{bc}.$$
Să se arate că P este centrul cercului înscris în triunghiul ABC.

Gheorghe Iurea, Petru Răducanu

3. a) Să se determine numărul de şiruri $(a_n)_{n\geq 1}$ având termeni întregi cu proprietatea $a_n\cdot a_{n+2}\cdot a_{n+3} = -1$, oricare ar fi $n \geq 1$.
b) Să se demonstreze că nu există şiruri $(a_n)_{n\geq 1}$ având termeni întregi astfel încât $a_n\cdot a_{n+2}\cdot a_{n+3} = 2005$ pentru orice $n \geq 1$.

Dinu Şerbănescu

4. Fie $p>2$ un număr prim şi q un număr natural nedivizibil cu p. Să se arate că
$$\sum_{k=1}^{p-1}\left[(-1)^k\cdot k^2\cdot\frac{q}{p}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

Dorin Andrica, Titu Andreescu

Concursul național de matematică “Alexandru Myller”
Ediția a III-a, martie 2005
Clasa a X-a

1. i) Arătați că, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, există numerele naturale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ în progresie aritmetică astfel încât media aritmetică a oricăror k dintre ele ($1 \leq k \leq n$) să fie număr natural.
   ii) Stabiliți dacă există un şir strict crescător de numere naturale, cu proprietatea că media aritmetică a oricăror n ($n \in \mathbf{N}^*$) termeni ai şirului să fie număr natural.

2. Fie ABC un triunghi cu $m\left(\hat{A}\right) < 90^\circ$. În exteriorul triunghiului ABC se consideră punctele D şi E, astfel încât $DA = DB$, $EA = EC$ şi $m\left(A\hat{D}B\right) = m\left(A\hat{E}C\right) = 2m\left(\hat{A}\right)$. Demonstrați că simetricul punctului A față de mijlocul segmentului DE este centrul cercului circumscris lui ABC.

3. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$, cu $a+b+c = 1$. Demonstrați inegalitatea:
$$\log_a (a^2 + b^2 + c^2) + \log_b (a^2 + b^2 + c^2) + \log_c (a^2 + b^2 + c^2) \leq$$
$$\leq a \log_a abc + b \log_b abc + c \log_c abc.$$

4. Într-o noapte, străzile unei localități cu 2004 case au fost acoperite cu zăpadă. Demonstrați că se pot face poteci între case astfel încât să existe câte două case din care pornesc n poteci, pentru fiecare $n = 1, 2, \ldots, 1002$.

Concursul național de matematică "Alexandru Myller"
Ediția a III-a, martie 2005
Clasa a XI-a

1. Fie $A,\ B \in M_2(\mathbf{Z})$ cu proprietatea $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2005 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se arate că există $D \in M_2(\mathbf{Z})$ astfel încât $D^{2005} = BA$.

Dinu Şerbănescu

2. Fie $A \in M_4(\mathbf{R})$ o matrice nesingulară cu proprietățile det $(A + {}^tA) = 5$ det A şi det $(A - {}^tA) =$ det A. Să se arate că pentru orice rădăcină nereală ω de ordinul cinci a unității are loc relația: det $(\omega A + {}^tA) = 0$.

Dan Popescu

3. Fie f:$[0, \infty) \to$ R o funcție continuă pentru care $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale pozitive astfel încât $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ este un şir mărginit. Să se arate că $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{n} = 0$.

Dorin Andrica, Mihai Piticari

4. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere iraționale strict pozitive.
a) Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, dezvoltarea binomială $(1 + a_n)^n$ admite un unic termen maxim şi să se determine rangul $r_n \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ al acestuia.
b) Considerăm şirurile $x_n = a_n\sqrt{n}$, $n \in \mathbf{N}^*$ şi $y_n = (1 + a_n)^{r_n}$, $n \in \mathbf{N}^*$. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este convergent dacă şi numai dacă şirul $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ este convergent.

Eugen Păltănea

Concursul național de matematică “Alexandru Myller”
Ediția a III-a, martie 2005
Clasa a XII-a

1. Fie f:$[a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că există o constantă reală c, astfel încât pentru oricare $x \in [a, b]$ există $y \in [a, b] \setminus \{x\}$ cu $\int_x^y f(t)\,dt = c$. Să se arate că funcția f are cel puțin două rădăcini în intervalul (a, b).

   Eugen Paltanca

2. Fie f:$[0, 1] \to \mathbf{R}$ o funcție crescătoare. Arătați că, dacă $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(\int_0^x f(t)dt \right) dx = 0$, atunci f($x$) = 0, $(\forall)\ x \in (0, 1)$.

   Mihai Piticari

3. Determinați funcțiile continue f:$[0, 1] \to [0, 2]$, care au proprietatea:

$$\left(\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} x \cdot f(x)dx \right)^2 = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} x^2 \cdot f(x)dx, (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

   Gabriel Mirsanu, Andrei Nedelcu

4. Fie K un corp finit şi f:K→K*. Să se arate că există $\mathrm{P} \in \mathrm{K}[\mathrm{X}]$ reductibil, astfel încât P(x) = f(x), $(\forall)\ x \in \mathrm{K}$.

   Marian Andronache