Clasa a III-a

1. a) De la $7:45$ la $13:35$ sunt 6 "jumătăţi" de oră: 8.30, 9.30, 10.30, 11.30, 12.30 şi 13.30, pentru care ceasul bate de 6 ori.

Apoi, la orele fixe ceasul va bate de încă $8+9+10+11+12+1=51$ ori (la ora 13 bate doar o singură dată).

În total ceasul bate de $51+6=57$ ori.

b) $10=1+2+7=1+3+6=1+4+5=2+3+5$.

2. Numărul maxim de baghete care pot fi oferite este 28 şi se obţine dacă întârzie toţi cei 7 prieteni:

$$1+2+3+4+5+6+7=28.$$

Dar s-au oferit 22 de baghete. Cum $28-22=6$ şi $6=1+2+3$, rezultă că au 3 prieteni au venit la timp şi au întârziat $7-3=4$ prieteni.

3. Sunt $2+3+5+7=17$ familii cu cel puţin doi copii, iar în aceste familii sunt 51 de copii.

Restul de copii provin din familiile cu un copil, deci sunt $60-51=9$ familii cu un copil

Însemană că sunt $30-9-17=4$ familii fără copii.

4. Magicianul are 47 de bile albe (10 în cutia roşie, 20 în cea albastră şi 17 în cea galbenă) şi 55 de bile negre (18 în cutia roşie, 22 în cea albastră şi 15 în cea galbenă). În total are 102 bile.

Clasa a IV-a

1. a) Suma este 240. b) Diferenţa dintre rezultatele obţinute provine din numerele cărora li s-a schimbat semnul.

Cum $240-118=122$, rezultă că suma numerelor cu semnul schimbat este $122:2=61$. Singurele numere cu suma 61 din suma dată sunt 25 şi 36.

2. Ca să poată împrejmui grădina cu 5 rânduri, folosind 850 m de sârmă, perimetrul grădinii ar trebui să fie $850:5=170$ m. Dacă lăţimea rămâne la fel, atunci lungimea ar trebui să fie egală cu $(170-2\times 30):2=55$ m. Deci lungimea trebuie micşorată cu $65-55=10$ m.

3. Fie $\overline{abcde}$ un număr ca în enunţ. Cum a, b, c, d, e sunt distincte, rezultă că $a<b<c<d<e$ sau $a>b>c>d>e$ (nu putem avea diferenţe în sens crescător şi apoi descrescător, pentru că s-ar obţine cifre egale). Sunt posibile soluţiile: 13579, 97531 şi 86420.

4. Folosind o singură cifră impară, se pot numerota primele 5 pagini. Folosind numere de două cifre impare se pot numerota şi următoarele $5\times 5=25$ agini, iar cu numere de trei cifre impare se pot numerota următoarele $5\times 5\times 5=125$ de pagini.

Aşadar, a 50-a pagină este a 20-a pagină numerotată cu trei cifre impare.

Cum sunt 25 de numere de trei cifre impare care încep cu 1, rezultă că numărul de pe a 50-a pagină începe cu 1, iar ultimele sale două cifre formează al douăzecelea număr format cu două cifre impare, adică 79. Numărul căutat este 179.

Clasa a V-a

1. Fie $a < b < c < d < e$ numerele considerate. **(1p)**

Atunci $b \geq a+1$, $c \geq a+2$, $d \geq a+3$ şi $e \geq a+4$, deci $12 = a+b+c+d+e \geq 5a+10$. Rezultă $5a \leq 2$, deci $a = 0$ **(1p)**

Ca urmare, $b+c+d+e = 12$, $b \geq 1$. La fel ca mai sus, avem $c \geq b+1$, $d \geq b+2$, $e \geq b+3$, deci $12 = b+c+d+e \geq 4b+6$, de unde $4b \leq 6$. Cum $b \geq 1$, rezultă $b = 1$. **(1p)**

Obţinem $c \geq 2$ şi $c+d+e = 11$. Apoi, din $d \geq c+1$, $e \geq c+2$, deci $11 = c+d+e \geq 3c+3$, de unde $3c \leq 8$, adică $c \leq 2$. Cum $c \geq 2$, rezultă $c = 2$ şi $d+e = 9$. **(1p)**

Soluţii sunt $d = 3$ şi $e = 6$ sau $d = 4$ şi $e = 5$. **(1p)**

Cele 5 numere pot fi 0, 1, 2, 3, 6 care au suma pătratelor 50, şi 0, 1, 2, 4, 5, care au suma pătratelor 46. **(2p)**

2. Resturile împărţirilor numerelor naturale la 20 sunt mai mici decât 20. **(1p)**

Însumând cele mai mici unsprezece numere naturale neprime obţinem

$$0+1+4+6+8+9+10+12+14+15+16 = 95 < 113. \qquad \textbf{(2p)}$$

Însumând cele mai mici unsprezece numere naturale neprime şi nenule obţinem

$$1+4+6+8+9+10+12+14+15+16+18 = 113. \qquad \textbf{(2p)}$$

Deoarece suma resturilor trebuie să fie mai mare decât 113 şi termenii sumei sunt diferiţi şi mai mici decât 20, rezultă cel puţin unul dintre resturile obţinute este număr prim. **(2p)**

3. Din enunţ se obţine $190b + 4d + 1 = 1000\,(d-a) + 70c + a$. **(2p)**

Rezultă de aici că $d - a \leq 1$, de unde $d = a$ sau $d = a+1$. **(2p)**

Cazul $d = a$ conduce la contradicţie, iar în cazul $d = a+1$ se obţine unica soluţie $a = 5$, $b = 7$, $c = 5$, $d = 6$. **(3p)**

4. Dacă p^k se scrie ca suma a $n \geq 2$ numere naturale consecutive, iar cel mai mic dintre aceste numere este $m+1$, rezultă că

$$p^k = (m+1) + (m+2) + ... + (m+n) = mn + \frac{n\,(n+1)}{2},$$

de unde rezultă că $n\,(2m+n+1) = 2p^k$. **(2p)**

Cum $n < 2m+n+1$, iar p este prim, sunt posibile două situaţii:

(a) $\begin{cases} n = 2p^a \\ 2m+n+1 = p^{k-a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2p^a \\ m = \dfrac{p^{k-a} - 2p^a - 1}{2} \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{N}$, $a \leq k$.

Cum $n < 2m+n+1$, rezultă $2p^a < p^{k-a}$ şi, având în vedere că $p \geq 3$, rezultă $a < k-a \Leftrightarrow 2a < k$.

- Dacă k este par, $k = 2s$, numărul a poate lua valorile 0, 1, ..., $s-1$, deci sunt s valori.
- Dacă $k \geq 3$ este impar, $k = 2s+1$, numărul a poate lua valorile 0, 1, ..., s, deci sunt $s+1$ valori.

(b) $\begin{cases} n = p^a \\ 2m+n+1 = 2p^{k-a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = p^a \\ m = \dfrac{2p^{k-a} - p^a - 1}{2} \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{N}$, $a \leq k$.

La fel, din $n < 2m+n+1$, rezultă $p^a < 2p^{k-a}$ şi, având în vedere că $p \geq 3$, rezultă $a \leq k-a \Leftrightarrow 2a \leq k$. În plus, cum $n = p^a \geq 2$, rezultă $a \neq 0$.

- Dacă k este par, $k = 2s$, numărul a poate lua valorile 1, ..., s, adică s valori.
- Dacă $k \geq 3$ este impar, $k = 2s+1$, numărul a poate lua valorile 1, ..., s, adică s valori. **(4p)**

Numind "soluţie" o modalitate de scriere a numărului p^k ca sumă de n numere consecutive, din analiza cazurilor (a) şi (b), rezultă că atunci când k este par, $k = 2s$, se obţin s soluţii în cazul (a) şi s soluţii în cazul (b), adică $2s = k$ soluţii în total, iar atunci k este impar, se obţin $2s+1 = k$ soluţii ($s+1$ soluţii în cazul (a) şi s soluţii în cazul (b)). În fiecare caz obţinem k moduri de scriere.

Observaţie: În cazul $k = 1$, se obţine $a = 0$, $n = 2$, deci $p = \dfrac{p-1}{2} + \dfrac{p+1}{2}$. Având în vedere că pentru $p = 3$, avem $\dfrac{p-1}{2} = 1$, sunt posibile două scrieri ale lui $p = 3$ ca sumă de numere naturale consecutive: $3 = 1+2 = 0+1+2$. **(1p)**

Clasa a VI-a

1. Presupunem prin absurd că $a \neq b$, spre exemplu $a > b$. Atunci:

$$a + 2^b = b + 2^a \Rightarrow 2^a - 2^b = a - b \Rightarrow 2^b \left(2^{a-b} - 1\right) = a - b. \qquad \textbf{(2p)}$$

Notând $a - b = m$, $m \in \mathbb{N}^*$, rezultă $2^b(2^m - 1) = m$, de unde $2^m - 1 \leq m$. **(2p)**

Dar $2^m - 1 = \underbrace{1 + 2 + ... + 2^{m-1}}_{m \text{ termeni}} \geq m$, de unde rezultă că $2^m - 1 = m$. Atunci $2^b = 1$, adică $b = 0$, ceea ce nu este posibil. **(2p)**

Aşadar, presupunerea făcută este falsă, deci $a = b$. **(1p)**

2. Fie x numărul căutat. Conform ipotezei, $x = 3a + 1 = 5b + 2 = 7c + 3$, unde $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. **(1p)**

Din egalitatea $3a = 5b + 1$ rezultă $3 \mid 5b + 1 \Rightarrow 3 \mid b - 1 \Rightarrow b = 3k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, deci $x = 15k + 7$. **(2p)**

Deoarece $x = 7c + 3$, rezultă $15k + 7 = 7c + 3$, de unde $7 \mid 15k + 4$. Obţinem $7 \mid k + 4$, deci $k = 7p + 3$, unde $p \in \mathbb{N}$. Ca urmare, $x = 105p + 52$. **(2p)**

Impunând condiţia $x \leq 9999$, rezultă $105p + 52 \leq 9999$, de unde $p \leq 94$. Se obţine $x = 105 \cdot 94 + 52 = 9922$. **(2p)**

3. Suma din enunţ conţine $p + 1$ termeni de forma $(a, a + 6)$, unde $a \in \mathbb{N}$.

Dacă $d = (x, x + 6)$, unde $x \in \mathbb{N}$, atunci, din $d \mid x$ şi $d \mid x + 6$ rezultă $d \mid 6$, deci $d \in \{1, 2, 3, 6\}$. **(2p)**

Apoi, dacă $d = (x, x + 6)$, atunci $d = (x + 6, x + 12)$ şi, în general, $d = (x + 6y, x + 6z)$, pentru orice $y, z \in \mathbb{N}$. Obţinem:

- dacă $x = 6k$, $k \in \mathbb{N}$, atunci $(x, x + 6) = (6k, 6k + 6) = 6$
- dacă $x = 6k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, atunci $(x, x + 6) = (6k + 1, 6k + 7) = (1, 7) = 1$
- dacă $x = 6k + 2$, $k \in \mathbb{N}$, atunci $(x, x + 6) = (6k + 2, 6k + 8) = (2, 8) = 2$
- dacă $x = 6k + 3$, $k \in \mathbb{N}$, atunci $(x, x + 6) = (6k + 3, 6k + 9) = (3, 9) = 3$
- dacă $x = 6k + 4$, $k \in \mathbb{N}$, atunci $(x, x + 6) = (6k + 4, 6k + 10) = (4, 10) = 2$
- dacă $x = 6k + 5$, $k \in \mathbb{N}$, atunci $(x, x + 6) = (6k + 5, 6k + 11) = (5, 11) = 1$ **(2p)**

Împărţim suma dată în succesiuni de 6 termeni, fiecare succesiune având suma $6 + 1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 15$. **(2p)**

Întrucât $2010 = 134 \cdot 15$, rezultă că suma dată conţine exact $134 \cdot 6 = 804$ termeni, adică $p + 1 = 804$, de unde $p = 803$. **(1p)**

4. Numerele prime cu 10 sunr cele care au ultima cifră 1, 3, 7, 9. **(1p)**

Dacă ultima cifră a numărului p este 1, atunci ultima cifră a lui $9p$ este 9, deci $0 = a_{9p} = a_9 + a_p$, de unde rezultă $a_p = 0$. **(2p)**

Dacă ultima cifră a numărului p este 3, atunci ultima cifră a lui $3p$ este 9, deci $0 = a_{3p} = a_3 + a_p$, de unde rezultă $a_p = 0$. **(2p)**

Dacă ultima cifră a numărului p este 7, atunci ultima cifră a lui $7p$ este 9, deci $0 = a_{7p} = a_7 + a_p$, de unde rezultă $a_p = 0$. **(2p)**

Clasa a VII-a

1. Să presupunem că există numerele prime impare $p_1 < p_2 < ... < p_n$ $(n \geq 2)$ astfel încât

$$p_1^2 + p_2^2 + ... + p_n^2 = 2010. \qquad (*) \ \textbf{(1p)}$$

Întrucât pătratul oricărui număr prim impar este de forma $8k + 1$ $(k \in \mathbb{N}^*)$, **(1p)** rezultă că $2010 = M_8 + n$, **(1p)** deci $n = M_8 + 2 \in \{2, 10, 18, ...\}$. **(1p)**

Pentru $n \geq 10$, observăm că primele 10 numere prime impare sunt 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 şi $23^2 + 29^2 + 31^2 = 2331 > 2010$, egalitatea $(*)$ nu poate avea loc. **(1p)**

Pentru $n = 2$, rezultă că $p_1^2 + p_2^2 = 2010$. Dacă $p_1 = 3$, rezultă $p_2^2 = 2001$, imposibil. Dacă $p_1 > 3$, atunci p_1^2 şi p_2^2 sunt de forma $M_3 + 1$, deci $2010 = M_3 + 2$, fals. **(2p)**

2. Suma numerelor de la 1 la 2010 este $1005 \cdot 2011$. **(1p)**

Împărţind numerele de la 1 la 2010 în grupe de câte 15 numere, obţinem 134 de grupe. **(2p)**

Atunci, pentru orice ordonare, există o grupă cu suma termenilor egală sau mai mare decât $1/134$ din suma numerelor de la 1 la 2010, adică $15082,5$, deci cel puţin egală cu $15083 = 7 \cdot 2011 + 1006$. **(2p)**

Construcţia unei ordonări în care nu există 15 termeni cu suma mai mare de 15083. **(2p)**

3. Soluţiile sunt $x = z = 1$, $y = 0$ şi $x = 2$, $y = 1$, $z = 2$.

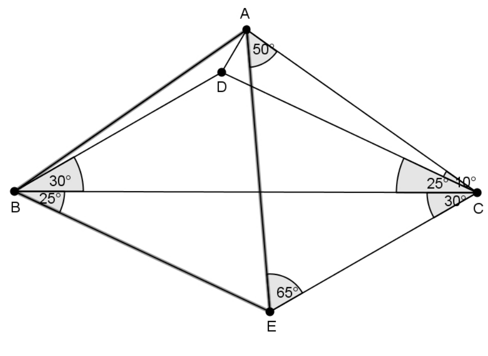
Dacă $y = 0$ atunci :

- pentru $x = 1$ avem soluţia $x = z = 1$; **(1p)**
- pentru $x \geq 2$, analizând modulo 9, deducem z par, $z = 2t$. În acest ultim caz ecuaţia este $3^x = (7^t - 2)(7^t + 2)$, deci ambele paranteze trebuie să fie puteri naturale ale lui 3 – imposibil, deoarece au diferenţa 4. **(1p)**

Dacă $y \geq 1$ atunci, analizând modulo 5, rezultă din nou z par, $z = 2t$, deci ecuaţia devine $3^x 5^y = (7^t - 2)(7^t + 2)$. Deoarece diferenţa celor două paranteze este 4, doar una dintre ele poate fi divizibilă cu 3, respectiv 5, **(1p)** deci sunt posibile cazurile :

- $7^t - 2 = 1$, $7^t + 2 = 3^x 5^y$ – imposibil;
- $7^t - 2 = 3^x$, $7^t + 2 = 5^y$ – imposibil, deoarece $7^t - 2$ nu poate fi divizibil cu 3; **(2p)**
- $7^t - 2 = 5^y$, $7^t + 2 = 3^x$, caz în care $3^x - 5^y = 4$. Situaţia $y = 0$ nu convine, iar pentru $y \geq 1$, analizând modulo 5 deducem x par, $x = 2u$, apoi $5^y = (3^u - 2)(3^u + 2)$, egalitate posibilă doar pentru $u = 1$. În acest caz obţinem $x = 2$, $y = 1$, $z = 2$. **(2 p)**

4. Avem $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB}) = 35°$ şi $m(\widehat{DBC}) = 30°$, $m(\widehat{DCB}) = 25°$. **(1p)**



Fie $E \in \mathrm{Int}(\widehat{BAC})$ astfel încât triunghiul ABE să fie echilateral. **(3p)**
Atunci $m(\widehat{EBC}) = m(\widehat{DCB}) = 25°$, de unde $CD \parallel BE$.
Deoarece $m(\widehat{CAE}) = 50°$ şi $[AE] \equiv [AB] \equiv [AC]$, triunghiul AEC este isoscel şi $m(\widehat{AEC}) = m(\widehat{ACE}) = 65°$.
Rezultă $m(\widehat{BCE}) = 30° = m(\widehat{DBC})$, deci $BD \parallel CE$.
Ca urmare, patrulaterul $BECD$ este paralelogram, de unde obţinem $[CD] \equiv [BE] \equiv [AB] \equiv [AC]$, adică triunghiul CAD este isoscel. Obţinem $m(\widehat{ADC}) = \dfrac{1}{2}\left(180° - m(\widehat{ACD})\right) = 85°$. **(3p)**

Clasa a VIII-a

1. Dacă (x, y) este soluţie, atunci $x + y > 0$. Presupunând $x + y > 1$ obţinem din prima ecuaţie

$$1 = x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} > \frac{x^2+y^2}{x+y} + \frac{2xy}{x+y} = \frac{(x+y)^2}{x+y} = x + y > 1, \qquad \textbf{(3p)}$$

fals. O contradicţie similară se obţine presupunând $x + y < 1$. Ca urmare, $x + y = 1$ şi din a doua ecuaţie se obţin soluţiile $x_1 = 1$ şi $x_2 = -2$. Soluţiile sunt $(1, 0)$ şi $(-2, 3)$. **(4p)**

2. Fracţiile din şir egale cu numărul raţional $\frac{1}{2}$ sunt de forma $\frac{k}{2k}$, unde $k \in \mathbb{N}^*$. **(2p)**

În grupul de fracţii de forma $\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}, \frac{n}{n-1}, \frac{n}{n-2}, ..., \frac{n}{1}\right)$ – care conţine $2n - 1$ fracţii – apare numărul raţional $\frac{1}{2}$ dacă şi numai dacă n este par, iar într-un astfel de grup este a n -a fracţie. **(2p)**

Ca urmare, $\frac{1}{2}$ apare a n -a oară pe poziţia

$$1 + 3 + 5 + ... + [2 \cdot (2n-1) - 1] + n = (2n-1)^2 + n = 4n^2 - 3n + 1. \qquad \textbf{(2p)}$$

Ca urmare, $a_{2010} = 4019^2 + 2010 = 16\,154\,371$. **(1p)**

3. $(\Rightarrow)$ Dacă triunghiul ABC este echilateral, atunci centrul cercului înscris coincide cu centrul de greutate, iar A', B', C' sunt mijloacele laturilor triunghiului. Rezultă $AA' = BB' = CC' = 3r$, de unde se obţine egalitatea din enunţ. **(2p)**

$(\Leftarrow)$ Întrucât $[AB'] \equiv [AC']$, $[BC'] \equiv [BA']$ şi $[CA'] \equiv [CB']$, rezultă $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$. Conform reciprocei teoremei lui Ceva, dreptele AA', BB' şi CC' sunt concurente într-un punct P. **(1p)**

Notând $S = \sigma[ABC]$, rezultă $\frac{PA'}{AA'} = \frac{\sigma[PBC]}{S}$, de unde

$$\frac{1}{AA'} = \frac{1}{S} \cdot \frac{\sigma[PBC]}{PA'} = \frac{1}{S} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot BC \cdot dist(P, BC)}{PA'} \leq \frac{1}{2S} \cdot \frac{BC \cdot PA'}{PA'} = \frac{BC}{2S},$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $PA' = dist(P, BC)$, sau altfel spus, $AA' \perp BC$. **(2p)**

Analog se obţine că $\frac{1}{BB'} \leq \frac{CA}{2S}$ şi $\frac{1}{CC'} \leq \frac{AB}{2S}$, cu egalitate dacă şi numai dacă $BB' \perp CA$ şi $CC' \perp AB$.
Sumând inegalităţile obţinute, rezultă

$$\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'} \leq \frac{AB + BC + CA}{2S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}.$$

Relaţia din enunţ corespunde cazului de egalitate, deci $AA' \perp BC$, $BB' \perp CA$ şi $CC' \perp AB$, adică P este ortocentrul triunghiului ABC.

Deoarece $AA' \perp BC$ *si* $IA' \perp BC$, rezultă că $I \in AA'$ şi analog, $I \in BB'$, $I \in CC'$. Ca urmare, în triunghiul ABC, centrul cercului înscris şi ortocentrul coincid, deci triunghiul este echilateral. **(2p)**

4. Notând $M_n = \text{cmmmc}[1, 2, ..., n]$, se obţine, prin calcul, că $M_7 = 420$, $M_8 = 840$, $M_9 = M_{10} = 2520$. **(1p)**

Egalitatea $M_9 = M_{10}$ apare întrucât factorii primi din descompunerea lui 10 sunt deja în mulţimea factorilor primi ai numerelor din mulţimea $\{1, 2, ..., 9\}$. Suntem conduşi la ideea că $M_{n-1} = M_n$ dacă şi numai dacă n nu este de forma p^k (o putere a unui prim). **(2p)**

Vom demonstra acest lucru. Dacă n nu este de forma p^k, atunci n se poate reprezenta sub forma $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r}$, unde $r \geq 2$. Fiecare $p_i^{\alpha_i}$ este mai mic decât n, deci este factor al lui M_{n-1}, adică $M_{n-1} = M_n$. **(2p)**

Dacă $M_{n-1} = M_n$, atunci, presupunând că $n = p^\alpha$, rezultă că p^α nu poate apare în descompunerea în factori a niciunui număr din mulţimea $\{1, 2, ..., n-1\}$. Dar $M_{n-1} = M_n$, deci p^α este factor în descompunerea unuia dintre numerele 1, 2, ..., $n - 1$, contradicţie. **(2p)**

Clasa a IX-a

1. Adunând inegalitatea

$$\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}+\frac{1}{18\cdot 81}\cdot\frac{1}{a^2b^2}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{2}\cdot\frac{b^2}{2}\cdot\frac{1}{18\cdot 81}\cdot\frac{1}{a^2b^2}}=\frac{1}{6} \qquad \mathbf{(0)}$$

cu analoagele, obţinem $a^2+b^2+c^2+\frac{1}{18\cdot 81}\left(\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2c^2}+\frac{1}{b^2c^2}\right)\geq\frac{1}{2}$. **(2p)** **(1)**

Din inegalitatea mediilor, avem $\frac{1}{9}=a^3+b^3+c^3\geq 3abc$, deci $abc\leq\frac{1}{27}$, sau, echivalent, $\frac{1}{abc}\geq 27$. **(1p)**

Atunci $\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2c^2}+\frac{1}{b^2c^2}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{(abc)^4}}\geq 3\cdot\sqrt[3]{27^4}=243$, **(1p)** de unde rezultă

$$\left(1-\frac{1}{18\cdot 81}\right)\left(\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2c^2}+\frac{1}{b^2c^2}\right)\geq\left(1-\frac{1}{18\cdot 81}\right)\cdot 243=\frac{1457}{6} \quad \mathbf{(2p)} \qquad \mathbf{(2)}$$

Adunând inegalităţile **(1)** şi **(2)**, rezultă $a^2+b^2+c^2+\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2c^2}+\frac{1}{b^2c^2}\geq\frac{1}{2}+\frac{1457}{6}=\frac{730}{3}$. Egalitatea are loc pentru $a=b=c=\frac{1}{3}$. **(1p)**

Comentariu metodic. Inegalitatea **(0)** se deduce exploatând cazul de egalitate $a=b=c=\frac{1}{3}$. Astfel, căutăm $\alpha>0$ astfel încât, în suma $\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}+\alpha\cdot\frac{1}{a^2b^2}$, cei trei termeni ai sumei să fie egali pentru $a=b=\frac{1}{3}$. Se obţine $\frac{1}{18}=\alpha\cdot 81$, de unde $\alpha=\frac{1}{18\cdot 81}$.

2. Notăm cu λ valoarea comună a rapoartelor din enunţ. Avem

$$\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{r_M}-\overrightarrow{r_N}=\left(\frac{1}{1-\lambda}\overrightarrow{r_B}+\frac{\lambda}{1-\lambda}\overrightarrow{r_C}\right)-\left(\frac{1}{1-\lambda}\overrightarrow{r_P}+\frac{\lambda}{1-\lambda}\overrightarrow{r_Q}\right)=\frac{1}{1-\lambda}\overrightarrow{PB}+\frac{\lambda}{1-\lambda}\overrightarrow{QC}. \quad \mathbf{(2p)} \quad \mathbf{(1)}$$

Considerăm punctele $P'\in(AB)$ şi $Q'\in(AC)$ astfel încât $[AP']\equiv[PB]$ şi $[AQ']\equiv[QC]$. Dacă A' este punctul în care bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$ intersectează $P'Q'$, atunci

$$\frac{A'P'}{A'Q'}=\frac{AP'}{AQ'}=\frac{PB}{QC}=\lambda. \qquad \mathbf{(2p)}$$

Ca urmare, $\overrightarrow{AA'}=\frac{1}{1-\lambda}\overrightarrow{AP'}+\frac{\lambda}{1-\lambda}\overrightarrow{AQ'}=\frac{1}{1-\lambda}\overrightarrow{PB}+\frac{\lambda}{1-\lambda}\overrightarrow{QC}$. **(2p)** Din relaţia **(1)** rezultă $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{AA'}$, de unde se obţine concluzia. **(1p)**

3. Din ipoteză rezultă relaţiile

$$a_3-a_1 = a_4a_6\dots a_{2n}(a_{2n+1}-a_{2n-1}) \qquad (1)$$
$$a_4-a_2 = a_5a_7\dots a_{2n+1}(a_{2n+2}-a_{2n}) \qquad (2)$$

Deoarece $a_n>0$ pentru $n\geq 3$, relaţiile (1) şi (2) arată că şirurile $S: a_1,a_3,a_5,\dots$ şi $T: a_2,a_4,a_6,\dots$ sunt monotone.

În cazul $a_1\neq a_3$ şi $a_2\neq a_4$, termenii şirului divid constante nenule, deci şirul este mărginit. Reiese că S şi T sunt constante de la un rang încolo, iar din (1) şi (2) deducem că S şi T sunt constante „de la început” – contradicţie.

În cazul $a_1=a_3$ şi $a_2=a_4$ reiese că S şi T sunt constante, iar aceste constante verifică $s+t+2010=st$, adică $(s-1)(t-1)=2011$. Cum 2011 este prim, avem cazurile $s=2$, $t=2012$ şi $s=2012$, $t=2$. **(3p)**

În cazul $a_1\neq a_3$ şi $a_2=a_4$, T este constant şi $a_3-a_1=t^{n-1}(a_{2n+1}-a_{2n-1})$, deci t^{n-1} divide numărul nenul a_3-a_1, ceea ce nu se poate decât dacă $t=1$. În acest caz, $a_{2n}=1$ şi $(a_{2n+1})_{n\geq 0}$ este o progresie aritmetică cu raţia 2011, deci $a_{2n+1}=a_1+2011n$. **(2p)**

În sfârşit, în cazul $a_1 = a_3$ şi $a_2 \neq a_4$ obţinem analog $a_{2n-1} = 1$ şi $a_{2n} = a_2 + 2011n$. **(2p)**

4. Numim *convenabil* un număr n pentru care $\left[n\sqrt{2}\right]$ este o putere a lui 2. Presupunem că există doar un număr finit de numere *convenabile*. **(1p)**

Fie k astfel încât $2^k > \left[n\sqrt{2}\right]$, pentru orice n *convenabil*. Fie q unicul întreg pentru care $q\sqrt{2} < 2^k \leq (q+1)\sqrt{2}$ şi $r = 2^k - q\sqrt{2}$; atunci $0 < r \leq \sqrt{2}$. **(2p)**

Există un unic întreg $j \geq 0$ pentru care $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < 2^j r \leq \sqrt{2}$; atunci avem:

$$\sqrt{2} - 1 < 2^j r = 2^j \left(2^k - q\sqrt{2}\right) \leq \sqrt{2},$$

sau, echivalent,

$$\left(q \cdot 2^j + 1\right)\sqrt{2} - 1 < 2^{j+k} \leq \left(q \cdot 2^j + 1\right)\sqrt{2}. \qquad \textbf{(3p)}$$

Notând $q \cdot 2^j + 1 = m$, obţinem $\left[m\sqrt{2}\right] = 2^{j+k}$, deci m este *convenabil*, contradicţie cu definiţia lui k. **(1p)**

Clasa a X-a

1. Pentru $y=0$ obţinem $f(x)=f(0)+x(g(x)+g(0))$, $\forall x\in\mathbb{R}$, şi, ca urmare, $f(y)=f(0)+y(g(y)+g(0))$, $\forall y\in\mathbb{R}$. **(1p)** Scăzând aceste relaţii, obţinem

$$f(x)-f(y)=xg(x)-yg(y)+(x-y)g(0)\Leftrightarrow(x-y)(g(x)+g(y))=xg(x)-yg(y)+(x-y)g(0),$$

echivalent cu $x(g(y)-g(0))=y(g(x)-g(0))$. **(2p)**

Pentru $y=1$, rezultă $g(x)=x(g(1)-g(0))+g(0)$ şi, notând $a=g(1)-g(0)$ şi $b=g(0)$, rezultă $g(x)=ax+b$, $\forall x\in\mathbb{R}$. **(2p)**

Atunci $f(x)=f(0)+x(ax+2b)=ax^2+2bx+c$, unde am notat $c=f(0)$. **(2p)**

Prin înlocuire, se verifică faptul că funcţiile de forma $f(x)=ax^2+bx+c$ şi $g(x)=ax+b$ sunt soluţii ale ecuaţiei funcţionale din enunţ, pentru orice $a,b,c\in\mathbb{R}$.

2. Notăm $|a|=|b|=|c|=r>0$ şi $p=abc$. Dacă $\alpha\overset{not}{=}a^2+\dfrac{bc}{a}\in\mathbb{R}$, atunci $\alpha=\overline{\alpha}$, de unde

$$a^3+bc=\frac{r^2\left(a^3+r^2bc\right)}{abc}\Leftrightarrow\frac{r^2}{abc}=\frac{a^3+bc}{a^3+r^2bc}\Leftrightarrow\frac{r^2}{p}=\frac{a^4+p}{a^4+pr^2},$$

şi, procedând analog, rezultă $\dfrac{r^2}{abc}=\dfrac{a^3+bc}{a^3+r^2bc}=\dfrac{b^3+ca}{b^3+r^2ca}=\dfrac{c^3+ab}{c^3+r^2ab}$. **(2p)** (1)

Apoi,

$$\frac{r^2}{abc}=\frac{\left(a^3+bc\right)-\left(b^3+ca\right)}{(a^3+r^2bc)-(b^3+r^2ca)}=\frac{a^3-b^3-c(a-b)}{a^3-b^3-r^2c(a-b)}\overset{a\neq b}{=}\frac{a^2+ab+b^2-c}{a^2+ab+b^2-r^2c}\quad\textbf{(2p)}\tag{2}$$

a) Dacă $a+b\neq 0$, adunând numărătorii şi numitorii fracţiilor din mijloc în şirul de rapoarte egale (1) şi simplificând cu $a+b$, obţinem

$$\frac{r^2}{abc}=\frac{a^2-ab+b^2+c}{a^2-ab+b^2+r^2c},\tag{3}$$

Din (2) şi (3) rezultă

$$\frac{r^2}{abc}=\frac{a^2+ab+b^2-c}{a^2+ab+b^2-r^2c}=\frac{a^2-ab+b^2+c}{a^2-ab+b^2+r^2c}=\frac{\left(a^2+ab+b^2-c\right)+\left(a^2-ab+b^2+c\right)}{(a^2+ab+b^2-r^2c)+(a^2-ab+b^2+r^2c)}=1,$$

deci $abc=r^2$, de unde $r^3=|abc|=r^2$, adică $r=1$ şi în final $abc=1$.

b) Dacă $a+b=0$ şi $a+c\neq 0$, procedând analog obţinem tot $abc=1$.

c) Dacă $a+b=0$ şi $a+c=0$, rezultă $b=c$, fals. **(3p)**

3. Evident, $a>1$, şi atunci $2^a<2^a+\log_2 a=n^2$, de unde rezultă $a<2\log_2 n$. **(1p)** Apoi, avem:

$$n^2=2^a+\log_2 a<2^a+\log_2(2\log_2 n)\Rightarrow a>\log_2\left[n^2-\log_2(2\log_2 n)\right]=2\log_2 n+\log_2\left(1-\frac{\log_2(2\log_2 n)}{n^2}\right).$$

Este suficient să arătam că $\log_2\left(1-\dfrac{\log_2(2\log_2 n)}{n^2}\right)>-\dfrac{1}{n}$, echivalent cu $\left(1-\dfrac{\log_2(2\log_2 n)}{n^2}\right)^n>\dfrac{1}{2}$. **(1p)**

Aplicând inegalitatea lui Bernoulli, avem

$$\left(1-\frac{\log_2(2\log_2 n)}{n^2}\right)^n>1-n\cdot\frac{\log_2(2\log_2 n)}{n^2}=1-\frac{\log_2(2\log_2 n)}{n},\quad\textbf{(3p)}$$

deci rămâne să demonstrăm acum că $1-\dfrac{\log_2(2\log_2 n)}{n}>\dfrac{1}{2}$, sau, echivalent, $2\log_2(2\log_2 n)<n$, adică $\log_2 n<2^{\frac{n}{2}-1}$.

Notând $\log_2 n = p > 1$, rezultă $n = 2^p$, iar ultima inegalitate se scrie $p < 2^{2^{p-1}-1}$. Aplicând din nou inegalitatea lui Bernoulli, avem

$$2^{2^{p-1}-1} = (1+1)^{2^{p-1}-1} > 1 + 2^{p-1} - 1 = 2^{p-1} > 1 + (p-1) = p. \qquad \textbf{(2p)}$$

4. ($\Rightarrow$) Presupunem că există o funcţie f cu proprietatea $\mathcal{P}$. Vom arăta că $f(1) = n$. Într-adevăr, presupunând că există $k \geq 2$ astfel încât $f(k) = n$, rezultă:

$$\begin{aligned} g(k) &= f(1) + f(2) + ... + f(k-1) + n - n\left[\frac{f(1) + f(2) + ... + f(k-1) + n}{n}\right] = \\ &= f(1) + f(2) + ... + f(k-1) + n - n\left[\frac{f(1) + f(2) + ... + f(k-1)}{n} + 1\right] = \\ &= f(1) + f(2) + ... + f(k-1) + n - \left(n\left[\frac{f(1) + f(2) + ... + f(k-1)}{n}\right] + 1\right) = g(k-1), \end{aligned}$$

contradicţie cu injectivitatea funcţiei g. Ca urmare, $f(1) = n$ şi atunci $g(1) = 0$. **(2p)**

Dacă n ar fi impar, din $g(n) = \dfrac{n(n+1)}{2} - n\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$, ar rezulta $g(n) = 0 = g(1)$, contradicţie. Ca urmare, n este par. **(1p)**

($\Leftarrow$) Vom demonstra că funcţia $f : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$, $f(k) = \begin{cases} n+1-k, & k \text{ impar} \\ k-1, & k \text{ par} \end{cases}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ este un număr par, are proprietatea $\mathcal{P}$.

Pentru orice $k \in \overline{1, \frac{n}{2}}$ avem: $\begin{cases} f(1) + f(2) + ... + f(2k-1) = k(n-1) + 1 \\ f(1) + f(2) + ... + f(2k) = k(n+1) \end{cases}$, deci

- $g(2k-1) = k(n-1) + 1 - n\left[\dfrac{kn - (k-1)}{n}\right] = k(n-1) + 1 - n \cdot \left[k - \dfrac{k-1}{n}\right] = \begin{cases} 0 & , k = 1 \\ n - k + 1, & k \geq 2 \end{cases}$.
- $g(2k) = k(n+1) - n\left[\dfrac{k(n+1)}{n}\right] = k(n+1) - n \cdot \left[k + \dfrac{k}{n}\right] = k(n+1) - nk = k.$

Este evident că dacă $a, b \in \{1, 2, ..., n-1\}$ au aceeaşi paritate, atunci $g(a) \neq g(b)$. Presupunând că există $k, j \in \overline{1, \frac{n}{2}}$ astfel încât $g(2k-1) = g(2j)$, ar rezulta $j = 0$ sau $j = n - k + 1$, imposibil. Aşadar g este injectivă. Deoarece domeniul de definiţie şi domeniul de valori al funcţiei g sunt mulţimi finite cu acelaşi cardinal, rezultă că g este bijectivă, deci f are proprietatea $\mathcal{P}$. **(4p)**

Clasa a XI-a

1. Notând $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{\tau(k)}$, avem $x_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\left(\sigma \circ \tau^{-1}\right)(j)}{j} = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\varphi(j)}{j}$, unde $\varphi = \sigma \circ \tau^{-1} \in S_n$. **(2p)**

Cu un raţionament standard, sau cu inegalitatea re-aranjamentelor, se probează că suma $\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\varphi(j)}{j}$, cu $\varphi \in S_n$, este minimă când $\varphi(j) = j$, $\forall j = \overline{1,n}$ (adică $\varphi = e$) şi maximă dacă $\varphi(j) = n - j + 1$, **(2p)** deci

$$n = \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{j} \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{\varphi(j)}{j} \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{n-j+1}{j} = (n+1)\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - n.$$

Rezultă că

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{\tau(k)} \leq \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{n} - \frac{1}{n}. \quad \textbf{(2p)}$$

Aplicând lema Cesaro-Stolz, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{n} = 0$. Obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{\tau(k)} = 0$. **(1p)**

2. a) Mulţimea $\mathcal{A}$ conţine matricele de forma $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\varepsilon^2 \end{pmatrix}$, cu $\alpha \in \mathbb{C}^*$ şi $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\varepsilon^3 = 1$. **(2p)**

b) Fie $f(x) = x^3 - \operatorname{Tr}(A)x^2 + \operatorname{Tr}(A^*)x - \det A$ polinomul caracteristic al matricii A. **(1p)**

Dacă λ_1, λ_2, λ_3 sunt rădăcinile lui f, atunci $\operatorname{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $\operatorname{Tr}\left(A^2\right) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 0$ şi $\operatorname{Tr}(A^*) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = 0$, de unde rezultă că $\operatorname{Tr}(A) = 0$, deci $f(x) = x^3 - \det A$. **(2p)**

Dacă A ar fi inversabilă, din $A^2 = AB$ ar rezulta $A = B$, contradicţie, deci $\det A = 0$ şi atunci $f_A(x) = x^3$, de unde $A^3 = O_3$.

Deoarece $A^2 = AB$, rezultă $A^2B = A^3 = O_3$ şi, apoi, $AB^2 = O_3$. Dacă B ar fi inversabilă, ar rezulta $A = O_3$, contradicţie, deci $\det B = 0$.

Întrucât polinomul caracteristic al lui B este $g(x) = x^3 - \det B$ (ca mai sus), rezultă $g(x) = x^3$, deci $B^3 = O_3$. **(2p)**

3. a)Prin inducţie se demonstrează că $a_n \in (0,1)$ pentru orice $n \geq 1$, deci $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

Cum $a_{n+1} - a_n = -\sin^2 a_n < 0$, $\forall n \geq 1$, rezultă că $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător şi, fiind şi mărginit, este convergent. Notând $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ $(0 \leq \lambda < 1)$, prin trecere la limită în relaţia de recurenţă se obţine $\lambda = 0$. **(1p)**

Întrucât

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) - n}{\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \left(\frac{a_n}{\sin a_n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \left(1 - a_n \cdot \left(\frac{\sin a_n}{a_n}\right)^2\right) \cdot \left(\frac{a_n}{\sin a_n}\right)^2 = 1,$$

conform Lemei Cesaro-Stolz rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n}} = 1$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 1$. **(2p)**

b) Pentru orice $p \in \mathbb{N}$ şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător, deci are limită în $\overline{\mathbb{R}}$.

Pentru $p = 0$ avem $b_n = n \to \infty$. **(1p)**

Pentru $p = 1$, să observăm că, întrucât $na_n > 0$, $\forall n \geq 1$, şi $na_n \to 1$, există $a \in (0,1)$ astfel încât $na_n > a$, pentru orice $n \geq 1$. Atunci

$$b_n \geq a\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \to \infty,$$

de unde rezultă că $b_n \to \infty$. **(1p)**

Dacă $p \geq 2$, din faptul că $\frac{\sin a_n}{a_n} > 0$, $\forall n \geq 1$, şi $\frac{\sin a_n}{a_n} \to 1$, rezultă că există $b \in (0,1)$ astfel încât $\frac{\sin a_n}{a_n} > b$, pentru orice $n \geq 1$. Atunci, pentru orice $n \geq 1$, avem:

$$b_n \leq a_1^2 + a_2^2 + \ldots a_n^2 \leq \frac{1}{b^2} \sum_{k=1}^{n} \sin^2 a_k = \frac{1}{b^2} \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) = \frac{a_1 - a_{n+1}}{b^2} < \frac{a_1}{b^2},$$

deci şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este mărginit. Ca urmare, $(b_n)_{n\geq 1}$ este convergent pentru orice $p \geq 2$. **(2p)**

4. a) Cum $a_k \geq a_1 \cdot k! \geq k!$, $\forall k \geq 1$, rezultă că $|x_n| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} < 2$, deci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit. **(2p)**

Pentru orice $n \geq 1$, avem

$$x_{2n+1} - x_{2n-1} = \frac{1}{a_{2n}} - \frac{1}{a_{2n+1}} > 0 \qquad \text{şi} \qquad x_{2n+2} - x_{2n} = \frac{1}{a_{2n+2}} - \frac{1}{a_{2n+1}} < 0,$$

deci $(x_{2n-1})_{n\geq 1}$ este strict crescător, iar $(x_{2n})_{n\geq 1}$ este strict descrescător.

Fiind monotone şi mărginite, şirurile $(x_{2n-1})_{n\geq 1}$ şi $(x_{2n})_{n\geq 1}$ sunt convergente. Notând $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1}$ şi $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}$, din $0 < x_{2n} - x_{2n-1} = \dfrac{1}{a_{2n}} \to 0$, rezultă că $\alpha = \beta$, deci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent. **(1p)**

b) Presupunem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{p}{q}$, cu $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$. Pentru orice $n \geq 1$ avem $x_{2n-1} < \dfrac{p}{q} < x_{2n}$, deci $0 < \dfrac{p}{q} - x_{2n-1} < x_{2n} - x_{2n-1} = \dfrac{1}{a_{2n}}$. Ca urmare,

$$0 < \frac{p}{q} - x_{2q-1} < \frac{1}{a_{2q}} \Leftrightarrow 0 < pa_{2q} - qa_{2q} \cdot \sum_{k=1}^{2q-1} \frac{(-1)^k}{a_k} < 1,$$

contradicţie cu $pa_{2q} - qa_{2q} \cdot \sum\limits_{k=1}^{2q-1} \dfrac{(-1)^k}{a_k} \in \mathbb{Z}$ (căci $a_k \mid a_{2q}$, pentru orice $k = \overline{1, 2q-1}$). Ca urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. **(4p)**

Clasa a XII-a

1. Din $xy = y^2x$, obţinem

$$xyx^{-1} = y^2 \Rightarrow y^4 = \left(xyx^{-1}\right) \cdot \left(xyx^{-1}\right) = xy^2x^{-1} = x\left(xyx^{-1}\right)x^{-1} = x^2yx^{-2}. \qquad \textbf{(3p)}$$

Analog, $y^8 = x^3yx^{-3}$, $y^{16} = x^4yx^{-4}$, $y^{32} = x^5yx^{-5}$, $y^{64} = x^6yx^{-6}$, $y^{128} = x^7yx^{-7} = y$, deci $y^{127} = e$. **(3p)** Cum 127 este număr prim şi $y \neq e$, rezultă $\operatorname{ord}(y) = 127$. **(1p)**

2. Vom demonstra mai întâi că, dacă G este comutativ, atunci $G_aG_b = G_d$.

Cum $(a, b) = d$, există $v, w \in \mathbb{Z}$ astfel încât $d = av + bw$. Dacă $x^d \in G_d$, avem $x^d = (x^v)^a (x^w)^b \in G_aG_b$, deci $G_d \subset G_aG_b$.

Întrucât $a = da_1$, $b = db_1$, $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$, pentru orice $x, y \in G$ avem $x^ay^b = \left(x^{a_1}y^{b_1}\right)^d \in G_d$, deci $G_aG_b \subset G_d$. **(3p)**

($\Leftarrow$) Dacă $(n, d) = 1$, există $u, t \in \mathbb{Z}$ astfel încât $du + nt = 1$, de unde rezultă că, pentru orice $x \in G$, avem $x = x^{du+nt} = (x^u)^d \in G_d$, deci $G \subset G_d \subset G$, adică $G_d = G_aG_b = G$. **(2p)**

($\Rightarrow$) Dacă $G_aG_b = G$, atunci $G_d = G$. Notând $(n, d) = s$ şi presupunând $s \neq 1$, din teorema lui Cauchy rezultă că există un element x de ordinul p al lui G, unde p este un divizor prim al lui s. Atunci $x^p = e$, şi, cum $s \mid d$, obţinem $x^d = e$. Întrucât $x \neq e$, rezultă că $|G_d| \leq n - 1 < |G|$, contradicţie. **(2p)**

3. a) Funcţia f este periodică, de perioadă π, şi, întrucât

$$\left(F(x+\pi) - F(x)\right)' = f(x+\pi) - f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R},$$

există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $F(x+\pi) - F(x) = c$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Mai mult, avem $c = F(\pi) - F(0) = \int_0^\pi f(x)\,dx > 0$.

Funcţia $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\Phi(x) = F(x) - \dfrac{c}{\pi}x$ este derivabilă şi periodică, o perioadă a sa fiind π. Deoarece $\Phi(\mathbb{R}) = \Phi([0, \pi])$ şi Φ este continuă pe $[0, \pi]$, rezultă că Φ este mărginită.

Funcţia F este derivabilă şi $F'(x) = f(x) \geq \cos^2(\cos x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci F este strict crescătoare. **(1p)**

Având în vedere că $F(x) = \Phi(x) + \dfrac{c}{\pi}x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, şi că Φ este mărginită, rezultă că $\lim\limits_{x \to \pm\infty} F(x) = \pm\infty$. Cum F are proprietatea lui Darboux, rezultă că $F(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, deci F este surjectivă. **(2p)**

b) Întrucât $xF\left(\dfrac{1}{x}\right) = x\Phi\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{c}{\pi}$, pentru orice $x \neq 0$, rezultă că $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \dfrac{c}{\pi}$.

Dacă $a \neq \dfrac{c}{\pi}$, atunci g are în origine o discontinuitate de speţa I, deci nu are proprietatea lui Darboux, şi atunci nu admite primitive.

Dacă $a = \dfrac{c}{\pi}$, atunci g este continuă, deci admite primitive. Rămâne să determinăm valoarea lui c. Avem

$$c = \int_0^\pi f(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(x)\,dx + \int_{\pi/2}^\pi f(x)\,dx.$$

Cu schimbarea de variabilă $\varphi : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x = \varphi(t) = \pi - t$, se obţine $\displaystyle\int_{\pi/2}^\pi f(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(t)\,dt$, deci $c = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$. **(1)**

Considerând funcţia $u : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x = u(y) = \frac{\pi}{2} - y$, rezultă

$$\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx = \int_{u(\pi/2)}^{u(0)} f(x)\,dx = \int_{\pi/2}^{0} f\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - y\right)' dy = \int_0^{\pi/2} f\left(\frac{\pi}{2} - y\right) dy. \qquad \textbf{(2)}$$

Din **(1)** şi **(2)** se obţine

$$c = \int_0^{\pi/2} \left(f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) dx = 2\int_0^{\pi/2} dx = \pi.$$

În concluzie, g admite primitive pe $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $a = 1$. **(4p)**

4. ($\Leftarrow$) Dacă f este constantă, atunci şirul $\left(\int_0^1 f(x+n)\,dx\right)_{n\geq 1}$ este constant, deci convergent. **(1p)**

($\Rightarrow$) Notăm $I_n = \int_0^1 f(x+n)\,dx$, $n \geq 1$ şi $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} I_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Fie $T \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $T > 0$, o perioadă a lui f şi $x_0 \in \mathbb{R}$. Întrucât mulţimea $A = \{k - hT \mid k, h \in \mathbb{N}\}$ este densă în $\mathbb{R}$, există un şir $(a_n)_{n\geq 1} \subset A \setminus \{x_0\}$, $a_n = k_n - h_n T \to x_0$, cu $(k_n)_{n\geq 1}$ strict crescător. Rezultă că:

$$I_{k_n} = \int_0^1 f(x+k_n)\,dx = \int_0^1 f(x+k_n-h_nT)\,dx = \int_0^1 f(x+a_n)\,dx = \int_{a_n}^{a_n+1} f(t)\,dt = F(a_n+1) - F(a_n),$$

unde F este o primitivă a lui f. Atunci

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} I_{k_n} = \lim_{n\to\infty}\left(F(a_n+1) - F(a_n)\right) = F(x_0+1) - F(x_0). \qquad \textbf{(3p)}$$

Cum $x_0 \in \mathbb{R}$ a fost ales arbitrar, obţinem $F(x+1) - F(x) = \lambda$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Prin derivare, rezultă că $f(x+1) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci numerele întregi sunt perioade ale funcţiei f. În consecinţă, elementele mulţimii A sunt perioade ale lui f.

Dacă $x \in \mathbb{R}$ şi $(u_n)_n \subset A$, $u_n \to x$, atunci $f(u_n) = f(0)$, pentru orice $n \geq 1$, de unde rezultă că $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = f(0)$, adică f este constantă. **(3p)**

Juniori II

1. a) Cu teorema împărţirii cu rest, obţinem $n = a \cdot n_1 + b$, $n = b \cdot n_2 + c$ şi $n = 2c \cdot n_3 + a$, unde n_1, n_2, n_3 sunt numere naturale. În plus, cum restul este mai mic decât împărţitorul, rezultă $b < a$, $c < b$ şi $a < 2c$, deci $c < b < a < 2c$. **(2p)**

Ca urmare, între c şi $2c$ sunt cel puţin două numere naturale distincte, ceea ce impune $c \geq 3$. Vom arăta că pentru $c = 3$ se obţine o soluţie. Cum $3 < b < a < 6$, rezultă că $b = 4$ şi $a = 5$, de unde obţinem:

$$\begin{cases} n = 5n_1 + 4 \\ n = 4n_2 + 3 \\ n = 6n_3 + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n+1 = 5(n_1+1) \\ n+1 = 4(n_2+1) \\ n+1 = 6(n_3+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 \mid n+1 \\ 4 \mid n+1 \\ 3 \mid n+1 \end{cases},$$

deci $n + 1$ este divizibil cu 60. Un număr n cu această proprietate este 59. **(3p)**

b) Evident, numerele de forma $59k$, $k \in \mathbb{N}^*$, au proprietatea **(P)**, pentru $a = 5k$, $b = 4k$ şi $c = 3k$. **(2p)**

2. Notăm $y_k = 2m+2p-x_k$, pentru orice $k = \overline{1,p}$. Deoarece $m < x_k < m+2p$, rezultă $m < 2m+2p-x_k < m+2p$ pentru orice $k = \overline{1,p}$. În consecinţă, $x_1, x_2, ..., x_p$ şi $y_1, y_2, ..., y_p$ sunt $2p$ numere naturale cuprinse între numerele m şi $m + 2p$, adică aflate în mulţimea $\{m+1, m+2, ..., m+2p-1\}$. **(3p)**

Cum în această mulţime sunt $2p - 1$ numere naturale distincte, rezultă că există $i, j \in \overline{1,p}$ astfel încât $x_i = y_j$, adică $x_i = 2m + 2p - x_j$, sau echivalent, $x_i + x_j = 2(m+p)$. **(2p)**

Dacă $i \neq j$, am obţinut două numere cu suma $2(m+p)$. Dacă $i = j$, se obţine $x_i = m + p$. **(2p)**

3. a) Evident. **(1p)** b) $\{1, 10, 10^2, ..., 10^{10}\}$. **(1p)**

c) Suma cifrelor numerelor de la 1 la 100 ia valori de la 1 la 18. **(1p)**

Pentru fiecare $n = \overline{1,18}$, notăm A_n mulţimea numerelor cuprinse între 1 şi 100 care au suma cifrelor k.

Atunci $\text{card}\, A_k = \begin{cases} 3, \text{ pentru } k = 1 \\ k+1, \text{ pentru } k = 2, 3, ..., 9 \\ 19-k, \text{ pentru } k = 10, 11, ..., 18 \end{cases}$.

Pentru a determina numărul maxim de elemente ale unei mulţimi *încifrate*, vom construi un *lanţ* de forma $k_1 \mid k_2 \mid ... \mid k_p$, de elemente din mulţimea $\{1, 2, ..., 18\}$, astfel încât suma $S = \text{card}\, A_{k_1} + \text{card}\, A_{k_2} + ... + \text{card}\, A_{k_p}$ să fie maximă. **(1p)**

Evident, $k_p \in \{10, 11, ..., 18\}$ şi $k_{p-1} \in \{1, 2, ..., 9\}$, întrucât fiecare număr din mulţimea $\{1, 2, ..., 9\}$ are dublul în mulţimea $\{10, 11, ..., 18\}$.

Situaţiile în care k_p este prim se exclud, întrucât conduc, vizibil, la sume "mici". Să observăm că este mai avantajos să considerăm k_{p-1} un număr "cât mai mare". **(1p)**

Rămân de analizat *lanţurile*:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ 18-9-3-1 \text{ pentru care se obţine } S = 18 \\ \bullet\ 16-8-4-2-1 \text{ pentru care se obţine } S = 23 \\ \bullet\ 15-5-1 \text{ pentru care se obţine } S = 13 \\ \bullet\ 14-7-1 \text{ pentru care se obţine } S = 16 \\ \bullet\ 12-6-3-1 \text{ pentru care se obţine } S = 21 \\ \bullet\ 10-5-1 \text{ pentru care se obţine } S = 18 \end{array}\right\} \textbf{(2p)}$$

Numărul maxim de elemente al unei mulţimi *încifrate* este 23, şi cuprinde numerele cu suma cifrelor 1, 2, 4, 8 şi 16, adică numerele:

$$\{1, 10, 100, 2, 11, 20, 4, 13, 22, 31, 40, 8, 17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, 80, 79, 88, 97\}.$$

Observaţie. Pentru indicarea mulţimii maximale/cardinalului maximal, fără demonstraţie, s-au acordat **2p**.

4. Fie segmentele $s_1 = A_1B_1$, $s_2 = A_2B_2$, ..., $s_{10} = A_{10}B_{10}$, astfel încât A_1, A_2, ..., A_{10} să se găsească pe dreaptă în această ordine, de la stânga la dreapta. **(1p)**

Dacă segmentele s_1, s_2, s_3 ar intersecta fiecare segmentul s_4, atunci s_1, s_2, s_3 şi s_4 ar conţine toate pe A_4 şi ar fi adevărată afirmaţia a). Dacă nu, notăm cu I_1 acel segment dintre s_1, s_2 şi s_3 care nu se intersectează cu s_4, deci nici cu s_5, s_6, ..., s_{10}. **(2p)**

Considerăm acum segmentele s_4, s_5, s_6. Dacă toate ar intersecta pe s_7, atunci s_4, s_5, s_6, s_7 ar avea punctul comun A_7, deci afirmaţia a) ar fi adevărată. Dacă nu, notăm cu I_2 acel segment dintre s_4, s_5, s_6 care nu are punct comun cu s_7. **(2p)**

Analog, dacă segmentele s_7, s_8, s_9 nu intersectează fiecare pe s_{10}, determinăm I_3 ca unul dintre segmentele s_7, s_8, s_9 care nu are puncte comune cu s_{10}. Am obţinut astfel segmentele I_1, I_2, I_3 şi s_{10} disjuncte două câte două. **(2p)**