Soluţii – juniori I

1. Fie a,b,c numere naturale nenule astfel încât cel mai mare divizor comun al lor este 1 şi $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$. Arătaţi că $a+b$ este pătrat perfect.

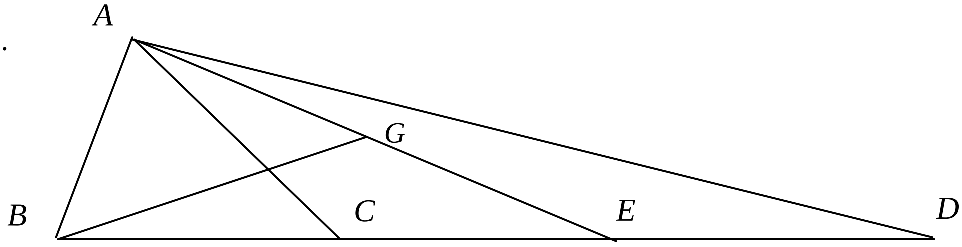
***

Soluţie. Egalitatea este $c(a+b)=ab$. Simplificând cu $d=(a,b)$ obţinem $c(a'+b')=da'b'$, cu $(a',b')=1$. De aici reiese $a'|c$ şi $b'|c$, deci $c=ka'b'$. Deducem $d=k(a'+b')$, de unde $a+b=d(a'+b')=k(a'+b')^2$. Pe de altă parte, din $(a,b,c)=1$ reiese $k=1$, de unde concluzia.

2. În triunghiul ABC, $m(\sphericalangle ABC)=60°, m(\sphericalangle ACB)=40°$ şi D este punctul de pe semi-dreapta $(BC$ pentru care $CD=AB+BC+AC$. Determinaţi $m(\sphericalangle ADB)$.

***

Soluţie.



Fie $E\in(CD)$ astfel încât $CE=CA$. Atunci $m(\sphericalangle CAE)=m(\sphericalangle CEA)=20°$. Fie $G\in(AE)$ astfel încât $AG=AB$; reiese $m(\sphericalangle ABG)=m(\sphericalangle AGB)=40°$. Astfel, patrulaterul $AGCB$ este inscriptibil, deci $m(\sphericalangle GBC)=m(\sphericalangle GCB)=80°$. Reiese $GB=BC$, deci ΔGBE este isoscel, de unde $GE=GB=BC$. Astfel, $AE=AB+BC=ED$, adică ΔAED este isoscel, deci obţinem $m(\sphericalangle EDA)=m(\sphericalangle EAD)=10°$.

3. Într-o cameră sunt 9 persoane, iar o parte dintre ele se cunosc (dacă A îl cunoaşte pe B, atunci şi B îl cunoaşte pe A). Se ştie că, oricum am alege cinci dintre ele, există printre persoanele alese cel puţin două perechi de cunoscuţi (este posibil ca o persoană să facă parte din ambele perechi). Determinaţi care este numărul minim posibil de perechi de cunoscuţi din cameră.

***

Soluţie. Minimul este 9 şi se obţine, de exemplu, luând trei grupe de câte trei persoane, în care fiecare îi cunoaşte pe ceilalţi doi.

Pentru arăta că trebuie minim 9, fie a_n numărul minim pentru un grup de *n* persoane. Atunci $a_{n+1}\ge\frac{n+1}{n-1}a_n$ deoarece, dacă c_i este numărul de perechi de cunoscuţi care rămân după ce înlăturăm persoana *i*, atunci $c_1+c_2+\ldots+c_{n+1}=(n-1)a_{n+1}$ (pentru că perechea de cunoscuţi (*x*, *y*) este numărată la fiecare eliminare, în afară de cazul în care eliminăm *x* sau *y*) şi $c_i\ge a_n$. Rezultă astfel $a_5=2$, $a_6\ge 3$, $a_7\ge 5$, $a_8\ge 7$, $a_9\ge 9$.

4. Fie $n\ge 3$ un număr întreg şi $a_1,a_2,\ldots,a_n b_1,b_2,\ldots,b_n$ numere reale pozitive astfel încât $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$ şi $b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2=1$. Arătaţi că

$$a_1(b_1+a_2)+a_2(b_2+a_3)+\ldots+a_{n-1}(b_{n-1}+a_n)+a_n(b_n+a_1)<1.$$

Soluţie. Inegalitatea este $\sum a_ib_i+\sum a_ia_{i+1}<1$. Din Cauchy, $\left(\sum a_ib_i\right)^2\le\sum a_i^2$, deci ar rămâne să arătăm că $\sqrt{\sum a_i^2}+\sum a_ia_{i+1}<1$.

Deoarece $\sum a_i=1$, reiese $\sum a_i^2=1-2\sum a_ia_j$, deci inegalitatea se reduce la

$$\sqrt{1-2\sum a_ia_j}<1-\sum a_ia_{i+1}.$$

Din ipoteză rezultă că membrul drept este pozitiv, deci ultima inegalitate devine

$$1-2\sum a_ia_j<1-2\sum a_ia_{i+1}+\left(\sum a_ia_{i+1}\right)^2,$$

ceea ce este evident.