Soluţii - seniori

1. Arătaţi că $\sum_{k=1}^{n}\frac{[kx]}{k}\le [nx]$, oricare ar fi $x\ge 0$.

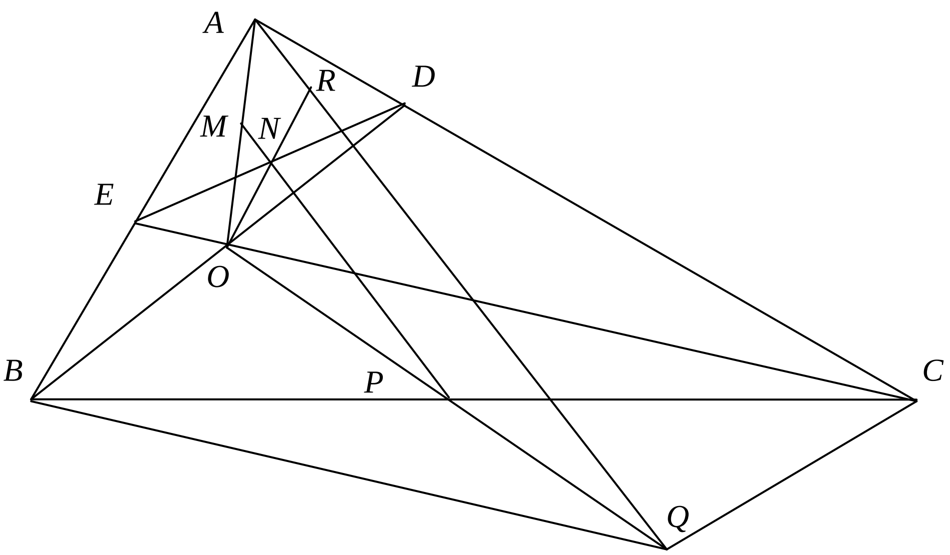
***

Soluţie. Este suficient să demonstrăm pentru $x=a/b$, unde a/b este fracţie ireductibilă, cu $1\le a<b\le n$ (avem perioada 1, iar pe [0;1) expresiile sunt constante pe intervale care ,,încep" cu a/b, $1\le a<b\le n$).

Împărţind cu rest, $ka=q_k b+r_k$, deci $[ka/b]=q_k=ka/b-r_k/b$, iar inegalitatea devine $\sum_{k=1}^{n}\frac{r_k}{k}\ge r_n$. Pentru a o dovedi, este suficient să arătăm că $\sum_{k=1}^{b-1}\frac{r_k}{k}\ge b-1$, căci $r_n\le b-1$. Aceasta reiese din inegalitatea de rearanjare, deoarece $(r_1,\ldots,r_{b-1})$ este o permutare pentru $(1,\ldots,b-1)$.

2. Fie *ABC* un triunghi neisoscel şi $E\in(AB), D\in(AC)$ astfel încât patrulaterul *BCDE* să fie inscriptibil. Dreptele *EC* şi *BD* se taie în *O*, iar *N*, *P* sunt mijloacele segmentelor (*DE*), respectiv (*BC*). Arătaţi că dreapta *AO* este tangentă la cercul circumscris triunghiului *PON*.

***



Soluţie. Fie *M* mijlocul lui *AO*. Atunci *M*, *N*, *P* sunt coliniare. Omotetizăm: $OR=2ON$, $OQ=2OP$; A,R,Q sunt coliniare. Deoarece *BQCO* este paralelogram, $CQ=BO$. Cum $\Delta EOD\sim\Delta BOC$ şi $\Delta ADE\sim\Delta ABC$, deducem $\frac{CQ}{EO}=\frac{BO}{EO}=\frac{BC}{ED}=\frac{AC}{AE}$. Apoi, din $\sphericalangle AEO\equiv\sphericalangle ACQ$ reiese $\Delta AEO\sim\Delta ACQ$, deci $\sphericalangle AOE\equiv\sphericalangle AQC$. Deoarece $\sphericalangle CQP\equiv\sphericalangle BOP\equiv\sphericalangle EON$, obţinem $\sphericalangle AON\equiv\sphericalangle OQA\equiv\sphericalangle OPN$, de unde concluzia.

3. Să se determine funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică relația:

$$f(x-f(y))=f(x)+f(f(y))-2xf(y),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Vasile Pop

Soluție. Luând $x=f(y)$, obţinem $f(0)=2f(f(y))-2(f(y))^2$, sau $f(f(y))=(f(y))^2+\frac{f(0)}{2},\forall y\in\mathbb{R}$ (*). Deducem $f(z)=z^2+\frac{f(a)}{2},\forall z\in \operatorname{Im} f$, cu $a=f(0)$.

O soluţie este $f=0$; dacă $f\neq 0$, atunci există $b\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(b)=c\neq 0$. Pentru $y=b$ obţinem $f(x-c)-f(x)=f(c)-2cx,\forall x\in\mathbb{R}$. Funcția din membrul drept este bijectivă, deci orice $z \in \mathbb{R}$ se poate scrie $z = f(x-c) - f(x)$, cu $x = x(z) \in \mathbb{R}$. Înlocuind în relaţia din ipoteză $x = f(x-c)$ şi $y = x$ obţinem $f(z) = f(f(x-c)) + f(f(x)) - 2f(x-c)f(x) =$ $= (f(x-c))^2 + \frac{f(0)}{2} + (f(x))^2 + \frac{f(0)}{2} - 2f(x-c)f(x) = (f(x-c) - f(x))^2 + f(0) = z^2 + a$.

Pentru $z = 0$, folosind şi (*) deducem $\frac{a}{2} = a$, deci $a = 0$.

În concluzie, funcţiile cerute sunt $f = 0$ şi $f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

4. Pe o tablă $n \times n$ se aşează numerele naturale de la 1 la n^2, fiecare în câte o căsuţă. Arătaţi că există două căsuţe cu o latură comună care conţin numere a, b cu $a - b \geq n$.

***

Soluţie. Dacă există *A*, *B* astfel încât $A < B$ şi *n* perechi disjuncte de căsuţe adiacente (a_i, b_i) astfel încât $a_i \leq A < B \leq b_i$, atunci

$$b_1 + \ldots + b_n - (a_1 + \ldots + a_n) \geq nB + \frac{1}{2}n(n-1) - nA + \frac{1}{2}n(n-1) \geq n^2,$$

de unde reiese că există *i* astfel încât $b_i - a_i \geq n$.

Pentru a arăta că există *A*, *B* şi *n* perechi disjuncte de căsuţe adiacente ca mai sus, fie M_r cel mai mare număr aşezat într-o căsuţă de pe rândul (linia sau coloana) *r* şi $m = \min M_r$. Să presupunem că *m* se află în căsuţa de pe linia *l* şi coloana *c* şi că *m* este cel mai mare element de pe linia *l*. Din definiţia lui *m*, orice coloană, exceptând, eventual, *c*, are un element $\geq m+1$. Deoarece celelalte elemente din linia *l* sunt mai mici decât m, în fiecare coloană – eventual, cu excepţia lui *c* –, există o pereche de căsuţe vecine în care avem un element $\geq m+1$ şi un element $\leq m-1$. Dacă un element al coloanei *c* este $\geq m+1$, atunci în această coloană avem o pereche de căsuţe vecine, care conţin un element $\geq m+1$ şi un element $\leq m$, deci situaţia din paragraful precedent se realizează pentru $A = m$ şi $B = m+1$. În caz contrar, toate elementele coloanei *c* sunt $\leq m$, şi situaţia din paragraful precedent se realizează pentru $A = m-1$ şi $B = m$.

Observaţie. Nu putem întări concluzia, după cum rezultă din aşezarea în care pe linia *i* punem $n(i-1)+1, n(i-1)+2, \ldots, ni$.