

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ

NICOLAE COCULESCU

Ediția a VII-a,
Slatina, 4 decembrie 2010

Seniori (IX - XII)

1. Arătați că $\sum_{k=1}^n \frac{[kx]}{k} \leq [nx]$, oricare ar fi $x \geq 0$.

2. Fie ABC un triunghi neisoscel și $E \in (AB)$, $D \in (AC)$ astfel încât patrulaterul $BCDE$ să fie inscriptibil. Dreptele EC și BD se taie în O , iar N , P sunt mijloacele segmentelor (DE) , respectiv (BC) . Arătați că dreapta AO este tangentă la cercul circumscris triunghiului PON .

3. Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică relația:

$$f(x - f(y)) = f(x) + f(f(y)) - 2xf(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

4. Pe o tablă $n \times n$ se așează numerele naturale de la 1 la n^2 , fiecare în câte o căsuță. Arătați că există două căsuțe cu o latură comună care conțin numere a, b cu $a - b \geq n$.

Notă.

1. Timp de lucru 3 ½ ore.
2. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se redactează pe o foaie separată.
3. Fiecărui subiect i se acordă de la 0 la 7 la puncte.