CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ
NICOLAE COCULESCU

Ediţia a VII-a
Slatina, 4 decembrie 2010

Juniori II (V-VI)

1. a) Determinaţi un număr natural nenul n cu proprietatea:
(P): există $a, b, c \in \mathbb{N}$ astfel încât resturile împărţirii lui n la a, b, respectiv $2c$ să fie egale cu b, c, respectiv a.

b) Arătaţi că există o infinitate de numere naturale n cu proprietatea **(P)**.

2. Fie $m, p \in \mathbb{N}^*$ şi numerele $x_1, x_2, ..., x_p$ distincte două câte două, cuprinse strict între m şi $m + 2p$. Demonstraţi că dintre numerele x_1, x_2, ..., x_p, ori există unul egal cu $m + p$, ori există două cu suma $2(m + p)$.

3. Spunem că o mulţime A de numere naturale nenule este *încifrată* dacă pentru orice două elemente a, $b \in A$, suma cifrelor lui a divide suma cifrelor lui b sau invers. Dacă un număr este scris cu o singură cifră, se consideră că suma cifrelor lui este acea cifră.

a) Arătaţi că mulţimea $A = \{10, 14, 23, 28\}$ este *încifrată*.

b) Construiţi o mulţime *încifrată* cu 11 elemente.

c) Determinaţi numărul maxim de elemente al unei submulţimi *încifrate* a mulţimii $\{1, 2, 3, ..., 100\}$.

4. Se consideră 10 segmente pe o dreaptă. Arătaţi că cel puţin una din afirmaţiile următoare este adevărată:

a) există printre ele patru segmente care au un punct comun;

b) există printre ele patru segmente disjuncte două câte două.

NOTĂ.
1. Timp de lucru 3 ore şi 30 de minute.
2. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se redactează pe o coală separată.
3. Fiecărui subiect i se acordă de la 0 la 7 puncte.