

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ

## NICOLAE COCULESCU

Ediția a VII-a,  
Slatina, 4 decembrie 2010

Juniori I (VII - VIII)

1. Fie  $a, b, c$  numere naturale nenule astfel încât cel mai mare divizor comun al lor este 1 și  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ . Arătați că  $a + b$  este pătrat perfect.

2. În triunghiul  $ABC$ ,  $m(\sphericalangle ABC) = 60^\circ$ ,  $m(\sphericalangle ACB) = 40^\circ$  și  $D$  este punctul de pe semidreapta  $(BC$  pentru care  $CD = AB + BC + AC$ . Determinați  $m(\sphericalangle ADB)$ .

3. Într-o cameră sunt 9 persoane, iar o parte dintre ele se cunosc (dacă  $A$  îl cunoaște pe  $B$ , atunci și  $B$  îl cunoaște pe  $A$ ). Se știe că, oricum am alege cinci dintre ele, există printre persoanele alese cel puțin două perechi de cunoscuți (este posibil ca o persoană să facă parte din ambele perechi). Determinați care este numărul minim posibil de perechi de cunoscuți din cameră.

4. Fie  $n \geq 3$  un număr întreg și  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  numere reale pozitive astfel încât  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$  și  $b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 = 1$ . Arătați că

$$a_1(b_1 + a_2) + a_2(b_2 + a_3) + \dots + a_{n-1}(b_{n-1} + a_n) + a_n(b_n + a_1) < 1.$$

Notă.

1. Timp de lucru 3 ½ ore.
2. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se redactează pe o foaie separată.
3. Fiecărui subiect i se acordă de la 0 la 7 la puncte.