CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ NICOLAE COCULESCU

Ediţia a VII-a, Slatina, 4 decembrie 2010
Juniori II (V-VI) – Soluţii

1. a) Cu teorema împărţirii cu rest, obţinem $n = a \cdot n_1 + b$, $n = b \cdot n_2 + c$ şi $n = 2c \cdot n_3 + a$, unde n_1, n_2, n_3 sunt numere naturale. În plus, cum restul este mai mic decât împărţitorul, rezultă $b < a$, $c < b$ şi $a < 2c$, deci $c < b < a < 2c$.

Ca urmare, între c şi $2c$ sunt cel puţin două numere naturale distincte, ceea ce impune $c \geq 3$. Vom arăta că pentru $c = 3$ se obţine o soluţie. Cum $3 < b < a < 6$, rezultă că $b = 4$ şi $a = 5$, de unde obţinem:

$$\begin{cases} n = 5n_1 + 4 \\ n = 4n_2 + 3 \\ n = 6n_3 + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n+1 = 5(n_1+1) \\ n+1 = 4(n_2+1) \\ n+1 = 6(n_3+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 \mid n+1 \\ 4 \mid n+1 \\ 3 \mid n+1 \end{cases},$$

deci $n + 1$ este divizibil cu 60. Un număr n cu această proprietate este 59.

b) Evident, numerele de forma $59k$, $k \in \mathbb{N}^*$, au proprietatea **(P)**, pentru $a = 5k$, $b = 4k$ şi $c = 3k$.

2. Notăm $y_k = 2m+2p-x_k$, pentru orice $k = \overline{1,p}$. Deoarece $m < x_k < m+2p$, rezultă $m < 2m+2p-x_k < m+2p$ pentru orice $k = \overline{1,p}$. În consecinţă, $x_1, x_2, ..., x_p$ şi $y_1, y_2, ..., y_p$ sunt $2p$ numere naturale cuprinse între numerele m şi $m+2p$, adică aflate în mulţimea $\{m+1, m+2, ..., m+2p-1\}$. Cum în această mulţime sunt $2p-1$ numere naturale distincte, rezultă că există $i, j \in \overline{1,p}$ astfel încât $x_i = y_j$, adică $x_i = 2m + 2p - x_j$, sau echivalent, $x_i + x_j = 2(m+p)$. Dacă $i \neq j$, am obţinut două numere cu suma $2(m+p)$. Dacă $i = j$, se obţine $x_i = m+p$.

3. a) Evident. b) $\{1, 10, 10^2, ..., 10^{10}\}$.

c) Suma cifrelor numerelor de la 1 la 100 ia valori de la 1 la 18.

Pentru fiecare $n = \overline{1,18}$, notăm A_n mulţimea numerelor cuprinse între 1 şi 100 care au suma cifrelor k.

Atunci $\operatorname{card} A_k = \begin{cases} 3, \text{ pentru } k = 1 \\ k+1, \text{ pentru } k = 2, 3, ..., 9 \\ 19-k, \text{ pentru } k = 10, 11, ..., 18 \end{cases}$.

Pentru a determina numărul maxim de elemente ale unei mulţimi *încifrate*, vom construi un *lanţ* de forma $k_1 \mid k_2 \mid ... \mid k_p$, de elemente din mulţimea $\{1, 2, ..., 18\}$, astfel încât suma $S = \operatorname{card} A_{k_1} + \operatorname{card} A_{k_2} + ... + \operatorname{card} A_{k_p}$ să fie maximă.

Evident, $k_p \in \{10, 11, ..., 18\}$ şi $k_{p-1} \in \{1, 2, ..., 9\}$, întrucât fiecare număr din mulţimea $\{1, 2, ..., 9\}$ are dublul în mulţimea $\{10, 11, ..., 18\}$.

Situaţiile în care k_p este prim se exclud, întrucât conduc, vizibil, la sume "mici". Să observăm că este mai avantajos să considerăm k_{p-1} un număr "cât mai mare".

Rămân de analizat *lanţurile*:

- $18 - 9 - 3 - 1$ pentru care se obţine $S = 18$
- $16 - 8 - 4 - 2 - 1$ pentru care se obţine $S = 23$
- $15 - 5 - 1$ pentru care se obţine $S = 13$
- $14 - 7 - 1$ pentru care se obţine $S = 16$
- $12 - 6 - 3 - 1$ pentru care se obţine $S = 21$
- $10 - 5 - 1$ pentru care se obţine $S = 18$

Numărul maxim de elemente al unei mulţimi *încifrate* este 23, şi cuprinde numerele cu suma cifrelor 1, 2, 4, 8 şi 16. Mulţimea maximală este $\{1, 10, 100, 2, 11, 20, 4, 13, 22, 31, 40, 8, 17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, 80, 79, 88, 97\}$.

4. Fie segmentele $s_1 = A_1B_1$, $s_2 = A_2B_2$, ..., $s_{10} = A_{10}B_{10}$, astfel încât A_1, A_2, ..., A_{10} să se găsească pe dreaptă în această ordine, de la stânga la dreapta.

Dacă segmentele s_1, s_2, s_3 ar intersecta fiecare segmentul s_4, atunci s_1, s_2, s_3 şi s_4 ar conţine toate pe A_4 şi ar fi adevărată afirmaţia a). Dacă nu, notăm cu I_1 acel segment dintre s_1, s_2 şi s_3 care nu se intersectează cu s_4, deci nici cu s_5, s_6, ..., s_{10}.

Considerăm acum segmentele s_4, s_5, s_6. Dacă toate ar intersecta pe s_7, atunci s_4, s_5, s_6, s_7 ar avea punctul comun A_7, deci afirmaţia a) ar fi adevărată. Dacă nu, notăm cu I_2 acel segment dintre s_4, s_5, s_6 care nu are punct comun cu s_7.

Analog, dacă segmentele s_7, s_8, s_9 nu intersectează fiecare pe s_{10}, determinăm I_3 ca unul dintre segmentele s_7, s_8, s_9 care nu are puncte comune cu s_{10}. Am obţinut astfel segmentele I_1, I_2, I_3 şi s_{10} disjuncte două câte două.