SOLUȚII CLASA A 8-A

1) a) $\Leftrightarrow a^{2n+1} - a^{n+1}b^n - (a^n b^{n+1} - b^{2n+1}) \geq 0 \Leftrightarrow (a^{n+1} - b^{n+1})(a^n - b^n) \geq 0$

i. dacă $a \geq b \Rightarrow a^n - b^n \geq 0$ și $a^{n+1} - b^{n+1} \geq 0 \Rightarrow ok$

ii. dacă $a < b \Rightarrow a^n - b^n < 0$ și $a^{n+1} - b^{n+1} < 0 \Rightarrow ok$

b) din pct. a) $\Rightarrow a^{2017} + b^{2017} \geq a^{1009}b^{1008} + a^{1008}b^{1009} \Rightarrow$

$$a^{2017} + b^{2017} + (ab)^{1007} \geq (ab)^{1008}\left(a + b + \frac{1}{ab}\right) = (ab)^{1008}(a + b + c) \Rightarrow$$

$$\sum \frac{1}{a^{2017} + b^{2017} + (ab)^{1007}} \leq \sum \frac{c^{1008}}{a + b + c} = \frac{a^{1008} + b^{1008} + c^{1008}}{a + b + c}$$

2. Vom demonstra că din mulțimea $B = \{1, 2, 3, \dots 11\}$ maxim 5 nr. pot fi în S. Considerăm următoarea partiție a lui $B$: $\{1,5\}; \{2,9\}; \{3,7\}; \{4,11\}; \{6,10\}; \{8\}$

Dacă am putea lua 6 elemente din B $\Rightarrow$ ar trebui să luăm câte un element din fiecare mulțime.

$8 \in S \Rightarrow 1 \notin S \Rightarrow 5 \in S \Rightarrow 9 \notin S \Rightarrow 2 \in S \Rightarrow 6 \notin S \Rightarrow 10 \in S$

$\Rightarrow 3 \notin S \Rightarrow 7 \in S \Rightarrow 11 \notin S \Rightarrow 4 \in 4 \Rightarrow 8 \notin S \Rightarrow$

Vom avea maxim 5 elemente din orice 11 numere consecutive. Cele 5 nr. pot fi luate:

$11k + 1; 11k + 3; 11k + 4; 11k + 6; 11k + 9$

Din mulțimea $\{1, 2, 3, \dots, 15\}$ maxim 8 sunt în S deoarece dacă considerăm partiția $\{1,8\}, \{2,9\}, \{3,7\}, \{4,11\}, \{5,12\}, \{6,13\}, \{10,14\}, \{15\} \Rightarrow$ nu putem avea 9

$2017 = 182 \cdot 11 + 15 \Rightarrow$ vom avea maxim $182 \cdot 5 + 8 = 918$

Un exemplu de 8 elemente din 15 este $3, 5, 6, 8, 11, 14, 16, 17$ iar un exemplu de 5 cu 918 elemente este:

$$S = \{\underbrace{1,3,4,6,9}, \underbrace{12,14,15,17,20} \dots \underbrace{1995,1997,2000}$$

3. Fie $A`C` \cap B`D` = \{O`\}$

Ducem $A`N \perp MB \Rightarrow C`N \perp MB \Rightarrow \left(\widehat{(A`MB),(C`MB)}\right) = \widehat{A`NC} = 90^0 \Rightarrow O`N = \frac{A`C`}{2} = \frac{l\sqrt{2}}{2}$

Notăm MD=x

$A_{\Delta MOB} =$

$= l^2\sqrt{2} - \left(\frac{xl\sqrt{2}}{2} + \frac{l^2\sqrt{2}}{4} + \frac{l\sqrt{2}(l-x)}{4}\right)$

$= \frac{4l^2\sqrt{2} - 2xl\sqrt{2} - l^2\sqrt{2} - l^2\sqrt{2} + xl\sqrt{2}}{4}$

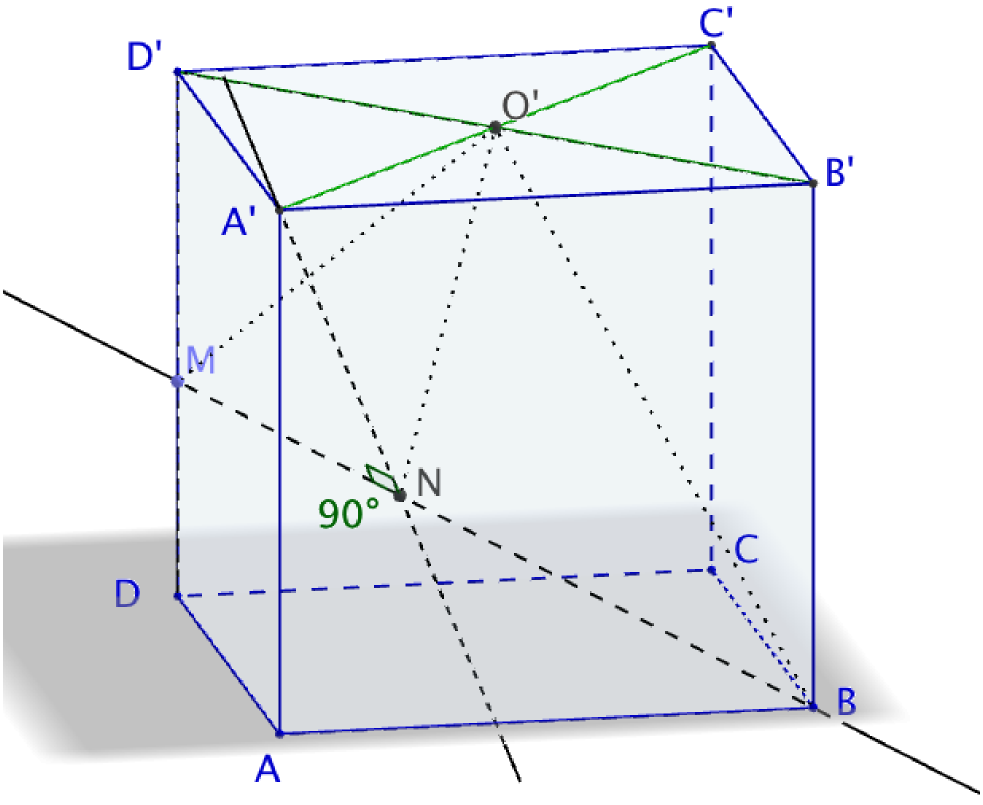
$= \frac{2l^2\sqrt{2} - xl\sqrt{2}}{4}$

$= \frac{l\sqrt{2}}{4} \cdot (2l - x)$

Dar

$A_{\Delta MO`B} = \frac{l\sqrt{2}}{4}\sqrt{2l^2 + x^2} \Rightarrow 2l - x = \sqrt{2l^2 + x^2} \Rightarrow (2l-x)^2 = 2l^2 + x^2 \Rightarrow$

$4l^2 - 4lx + x^2 = 2l^2 + x^2 \Rightarrow 2l - 2x = l_1 \Rightarrow x = \frac{l}{2} \Rightarrow$ M este mijlocul lui DD`



4.

Evident *BE* şi *DF* sunt bisectoarele unghiurilor $\widehat{CBD}$ $respectiv$ $\widehat{ADB}$.

Notăm $AE \cap DF = \{M\}$ $și$ $BE \cap CF = \{N\} \Rightarrow M$ $și$ $N$ centrele cercurilor înscrise în $\Delta AOD$, respectiv $\Delta BOC \Rightarrow M - O - N$ coliniare, *MN* bisectoarea

$\widehat{BOC} \Rightarrow m\left(\widehat{EMO}\right) = m\left(\widehat{MAO}\right) + m\left(\widehat{MOA}\right) = m(NOB) + m(\widehat{OBN}) = m\left(\widehat{ENO}\right)$

$\Rightarrow \Delta EMN$ isoscel $\Rightarrow EM \equiv EN$

Analog demonstrăm $FM \equiv FN \Rightarrow EF$ mediatoarea segmentului $[MN] \Rightarrow EF \perp MN$