

Rezolvări clasa a VII-a

1. Putem presupune $p < q < r$. Vom demonstra că $p=2$. Presupunem prin absurd că $p \neq 2 \Rightarrow p \geq 3, q \geq 5, r \geq 7 \Rightarrow$

$$\text{ipoteza} \Leftrightarrow \frac{2}{7} \leq \frac{1}{pq} + \frac{1}{pr} + \frac{1}{qr} \leq \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 7} \Rightarrow \frac{2}{7} \leq \frac{15}{3 \cdot 5 \cdot 7} \Leftrightarrow \frac{2}{7} \leq \frac{1}{7} \text{ (contradicție)} \Rightarrow p=2.$$

Vom demonstra că $q=3$. Altfel $q \geq 5, r \geq 7 \Rightarrow \frac{2}{7} \leq \frac{1}{pq} + \frac{1}{pr} + \frac{1}{qr} \leq \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 7} \Rightarrow \frac{2}{7} \leq \frac{14}{2 \cdot 5 \cdot 7} \Leftrightarrow \frac{2}{7} \leq \frac{1}{5} \Leftrightarrow 10 \leq 7$
(contradicție) $\Rightarrow q=3 \Rightarrow 7(2+3+r) \geq 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot r \Rightarrow 35 + 7r \geq 12r \Rightarrow 35 \geq 5r \Rightarrow r \leq 7 \Rightarrow r \in \{5, 7\} \Rightarrow$ Soluțiile (2, 3, 5), (2, 3, 7) și toate combinațiile lor.

2. $a+b+c=2019$

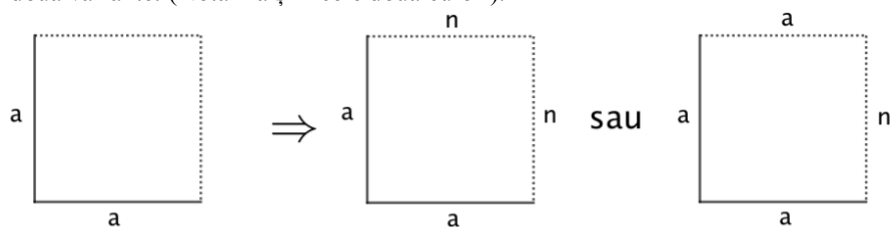
$$\sqrt{2a+23} + \sqrt{2b+23} + \sqrt{2c+23} \leq 111 \Leftrightarrow A = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{3(2a+23)}{111^2}} + \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{3(2b+23)}{111^2}} + \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{3(2c+23)}{111^2}} \leq 1$$

$$\text{Din inegalitatea mediilor} \Rightarrow A \leq \frac{3 \cdot \frac{1}{3} + \frac{6(a+b+c)+9 \cdot 23}{111^2}}{2} = \frac{1 + \frac{6 \cdot 2019 + 9 \cdot 23}{111^2}}{2} = 1.$$

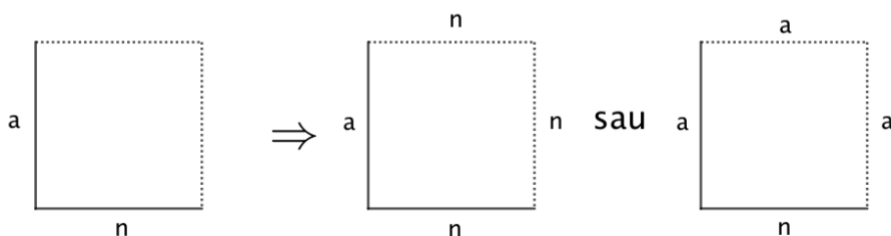
3.



Colorăm marginea A-B-C. Aceasta poate fi făcută în 2^{n+m} moduri. Dacă un pătrat unitate are două laturi colorate avem două variante: (Notăm a și n cele două culori).



\Rightarrow 2 posibilități



\Rightarrow 2 posibilități

\Rightarrow indiferent cum sunt colorate două laturi ale unui pătrat unitate avem 2 variante de colorare. Cum pătratul are $n \times m$ pătrățele unitate $\Rightarrow 2^{n \times m}$ posibilități \Rightarrow total $2^{n \times m} \cdot 2^{n+m} = 2^{n \times m + n + m}$ moduri.

