



1) Rezolvați în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația:

$$\sqrt{5y - y^2 - x} + \sqrt{5x - x^2 - y} = 5 - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right).$$

2) Se consideră 2019 numere naturale nenule cu proprietatea că oricum am alege un număr din cele 2019 pe cele 2018 numere rămase le putem împărți în două grupe de câte 1009 numere având aceeași sumă. Să se demonstreze că toate numerele sunt egale.

3) Fie  $ABCA'B'C'$  o prismă triunghiulară regulată.

a) Demonstrați că:  $(ABC') \perp (A'BC)$  dacă și numai dacă  $\frac{AA'}{AB} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ .

b) Știind că măsura unghiului dintre planele  $(ABC')$  și  $(A'BC)$  este de  $60^\circ$  determinați raportul dintre  $AA'$  și  $AB$ .

4) O piramidă se numește „bună” dacă putem numerota vârfurile și mijloacele muchiilor sale cu numerele consecutive 1, 2, 3, ... astfel încât fiecare număr din mijlocul unei muchii să fie media aritmetică a numerelor aflate în capetele respectivei muchii.

a) Să se arate că o piramidă patrulateră este „bună”.

b) Să se arate că nu există piramidă „bună” cu baza un poligon cu număr impar de vârfuri.

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare problemă se punctează corespunzător de la 0 la 7 puncte.