CONCURS MATE97
SOLUȚII CLASA A V-A

SUBIECTUL 1.
Un număr natural a este bun pentru numărul natural b dacă are cifrele distincte și suma pătratelor cifrelor lui a este egală cu numărul b. Să se determine:
a) Numerele naturale bune pentru numărul 97.
b) Cel mai mare număr natural care este bun pentru un număr natural de două cifre.

SOLUȚIE
a) 92 + 42 = 97, 92+42+02=97 singurele solutii =>Nr. bune ptr. 97 sunt : 94, 49, 940, 904, 490, 409.
b) Trebuie sa adunam suma patratelor celor mai mici cifre astfel incat rezultatul Sa nu aiba mai mult de 2 cifre. 02 + 12 + 22 + 32+ 42+52+ 62 = 91=> 6543210 cel mai mare numar bun pentru un numar de doua cifre .

SUBIECTUL 2.
Pentru un număr natural nenul n, notăm cu P(n) numărul de divizori primi ai lui n. De exemplu P(6) = 2, P(32) = 1.
a) Determinați P(949949).
b) Cât poate fi P(n) dacă n are 3 cifre ?
c) Arătați că există o infinitate de triplete de numere naturale nenule (a, b, c) astfel încât P(a) + P(b) + P(c) = P(a + b + c) .

SOLUȚIE
2. a) 949949 = 949 · 1000 + 949 = 949·1001=73·13·7·11·13 = 7·11·132 ·73 => P(949949)=4
b) 2·3·5·7=210 , 2·3·5·7·11 > 999 => P ($\overline{abc}$)≤4 . P(128)=P(27) , P(192)=P(26·3)=2
P(120) = P(23·3· 5)=3 , P(210)=P(2·3·5·7)=4. Deci 1,2,3,4 .
c) 2n+2n+2+2n+4=2n·21=2n·3·7 => 1+1+1= P (2n)+P(2n+2)+P(2n+4)=P(2n·3·7)=3

SUBIECTUL 3.
a) Notăm $\overline{aa}$numărul obținut prin lipirea a două numere naturale egale cu a.
De exemplu $\overline{257}$=257257, $\overline{1007}$=10071007 .
Ce valoare poate avea câtul împărțirii $\overline{aa}$: a^2dacă această împărțire este exactă?
b) Se consideră 2019 numere raționale mai mici ca $\frac{1}{2018}$ și cu suma egală cu 1. Arătați că oricum am alege trei numere a, b, c dintre cele 2019 vom avea a + b > c.

SOLUȚIE
a)
Dacă a=1, atunci $\overline{aa}: a^2 = 11$.
Dacă a are n≥ 2 cifre => 10^{n-1}≤ a <10^n =>
$\overline{aa}$= a·10^n+a = a·(10^n+1) =>$\overline{aa}$: a^2 = (10^n+1) : a => 10^n+1=a·b =>
b cifra. Dar b nu poate fi 0,1,2,3,4,5,6,8,9 deoarece 2,3,5 ∤10^n+1 => b poate fi 7.
Un exemplu de impartire cu catul 7 este 143143: 143^2 = 7

b)

Putem presupune $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \ldots \leq a_{2019}$

$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{2019}=1$ => $a_1+a_2= =1(a_3+a_4+\ldots+a_{2019}) > 1-\frac{2017}{2018}$ => $a_1+a_2>\frac{1}{2018}>a_k$ pentru orice k.

Si cum a_1+a_2 este cea mai mica suma posibila => concluzia problemei.

SUBIECTUL 4.
4) În fiecare pătrățel al unui dreptunghi 5×9 scriem unul dintre numerele 0 sau 1, după care calculăm sumele numerelor din fiecare coloană și fiecare linie. Se obțin astfel 14 sume. Care este cel mai mare număr de rezultate diferite care se pot obține?

SOLUȚIE.

1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0

Vom arata ca mumarul maxim este 9. Sumele considerate in enunt pot lua valori de la 0 la 9, in total 10 valori posibile. Demonstram ca nu putem obtine toate cele 10 valori. Sa presupunem contrariul, atunci in dreptunghi va fi o coloana sau o linie formata numai zerouri. Primul caz este imposibil caci suma numerelor in orice line si coloana ar fi mai mica sau egala cu 8, deci diferite de 9. In al doilea caz, suma nr. in orice coloana este mai mica sau egala cu 4, deci pe linii ar trebui sa se obtina sumele de la 5 la 9, ceea ce este imposibil, fiindca una dintre linii este nula. Un exemplu cu 9 sume diferite.
