CONCURS MATE97
SOLUȚII CLASA A VI-A

SUBIECTUL 1.
Pentru $n \geq 2$, n număr natural, considerăm mulțimile:
$A_n = \{\ n*(n-1)*(n-2)*.....*3*2*1 \mid * \text{ este } + \text{ sau } - \}$.
a) Determinați $A_4 \cap N$
b) Determinați $A_{2018} \cap A_{2019}$
c) Arătați că $\{0, 2018, 2019\} \subset A_{2018} \cup A_{2019}$.

SOLUȚIE
1) a) $4*3*2*1= 4+3+2+1-2(a_1+a_2+\ldots)$=nr par

$$4-3-2+1=0$$

Dar $\left.\begin{array}{l} 4-3+2-1=2 \\ 4-3+2+1=4 \\ 4+3-2+1=6 \\ 4+3+2-1=8 \end{array}\right\} \Rightarrow A_4 \cap \mathbb{N}=\{0,2,4,6,10\}$

$$4+3+2+1=10$$

b) $2018 * 2017* \ldots *3*2*1=1009 \cdot 2019$ -
$-2(a_1+a_2+\ldots)= M_2+1 \Rightarrow A_{2018}$ contine doar M_2+1.
$2019 * 2018 * \ldots * 3 * 2* 1=$
$=2019 \cdot 1010 - 2(a_1+a_2+\ldots) = M_2 \Rightarrow A_{2019}$ contine doar $M_2 \Rightarrow A_{2018} \cap A_{2019} = \emptyset$

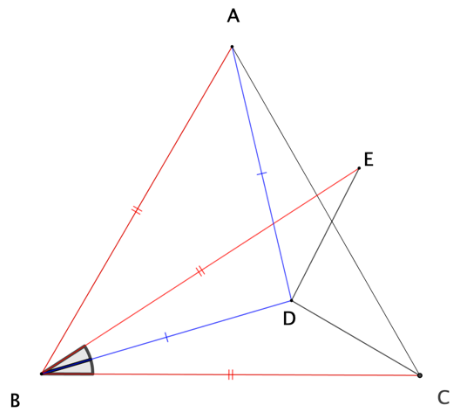
c) $(2019-2018-2017+2016)+\ldots+(7-6-5+4)+3-2-1=0 \Rightarrow 0 \in A_{2019} \subset A_{2018} \cup A_{2019}$.

$2019+(2018-2017-2016+2015)+\ldots+(6-5-4+3)-2+1=2018 \Rightarrow 2018 \in A_{2019} \subset A_{2018} \cup A_{2019}$.
$2018+(2017-2016-2015+2014)+\ldots+(5-4-3+2)+1=2019 \Rightarrow 2019 \in A_{2019} \subset A_{2018} \cup A_{2019}$.

SUBIECTUL 2.

Fie triunghiul echilateral ABC. În interiorul unghiului $\angle ABC$ se consideră punctul E astfel încât $BE \equiv AB$ și punctul D pe bisectoarea $\angle CBE$ astfel încât $AD \equiv BD$.
a) Determinați măsura unghiului $\angle BED$.
b) Arătați că AC este bisectoarea $\angle DAE$.

SOLUȚIE



2\. a) $\Delta DBC \equiv \Delta DBE$ (L.U.L.) =>$\widehat{BED} \equiv \widehat{BCD}$

AD≡ BD, CA≡ CB => CD mediatoarea lui AB => CD bisectoare (ΔABC echilateral) => $\widehat{BED} \equiv \widehat{BCD}$ = 30^0.

b) Notam m($\widehat{EBD}$)=m($\widehat{CBD}$)=x => m($\widehat{ABE}$)= 60^0-2x =>m($\widehat{BAE}$)= 60^0 +x => m($\widehat{CAE}$)= 60^0+x-60^0= x. Dar m($\widehat{DAC}$)= m($\widehat{DBC}$)= x ($\Delta DAC \equiv \Delta DBC$ (L.L.L.)) => AC bisectoare $\widehat{EAD}$.

SUBIECTUL 3.

Fie A o mulțime de numere naturale cu 2019 elemente cu proprietatea că pentru orice două numere naturale x și y care nu aparțin lui A nici numerele x+y, 2x, 2y nu aparțin lui A. Notăm cu S suma elementelor lui A. Determinați valoarea maximă pe care o poate avea S.

SOLUȚIE

Fie A= {$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2019}$} cu $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \ldots < a_{2019}$.

Vom arata ca $a_k \leq 2k-1$, pentru orice k.

Daca nu => exista un k astfel incat $a_k \geq 2k$.

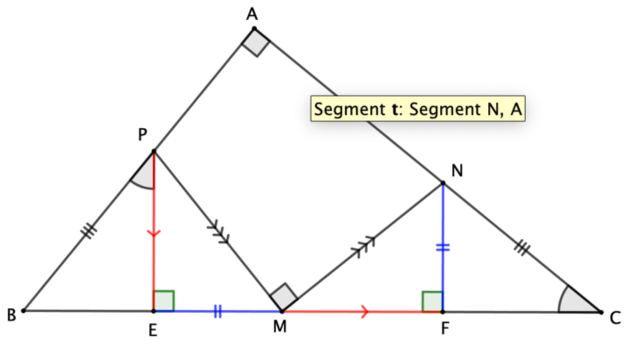
Dar $\left.\begin{array}{l} 1+(a_k-1)=a_k \\ 2+(a_k-2)=a_k \\ 3+(a_k-3)=a_k \end{array}\right|$ => din fiecare pereche (1, a_k-1), (2, a_k-2), …, (k, a_k-k) cel putin un numar apartine lui A. deoarece A are k-1 elemente mai mici decat a_k => $a_k \leq 2k-1$ =>

$S \leq 2\cdot 1-1+2\cdot 2-2+\ldots+2\cdot 2019-1 = 2(1+2+3+\ldots+2019)-2019 = 2019^2$ => Valoarea maxima a lui S este 2019^2 si se obtine pentru A= {$2\cdot1-1, 2\cdot2-1, 2\cdot3-1, \ldots, 2\cdot2019-1$}

SUBIECTUL 4.

4) Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A și punctele M ∈ (BC), N∈ (AC) și P ∈(AB) astfel încât MN ⊥ MP, CN ≡ BP, MN ≡ MP. Demonstrați că BP ≡ MN.

SOLUȚIE.



Ducem PE ⊥ BC, NF ⊥ BC => $\Delta PEM \equiv \Delta MFN$ (I.U.) => PE ≡ MF, EM ≡ NF. $\widehat{C}$ *si* $\widehat{B}$ complementare, $\widehat{B}$ *si* $\widehat{BPE}$ complementare => $\widehat{C} \equiv \widehat{BPE}$ => $\Delta EBP \equiv \Delta FNC$ (I.U.) BE ≡ NF => BE ≡ EM => ΔPBM isoscel (mediana = inaltime) => BP ≡ PM. Dar PM ≡ MN => BP ≡ PM.
