CONCURS MATE97
SOLUȚII CLASA A VII-A

SUBIECTUL 1.
Să se afle numerele naturale n și p știind că p este prim și numerele $2^n + p$ și $3^n - p$ sunt simultan pătrate perfecte.

SOLUȚIE
n = 0 fals,
n=1 => 2+p, 3-p p.p => p=2.
$n \geq 2$, p=2 => $2^n+2 = M_4+2$, fals => p>2 => p = M_4+1 deoarece 2^n+p este p.p.
Dar $3^n = x^2 + p \in \{M_4+1, M_4+2\}$ => n=2k => $p = (3^k-x)(3^k+x)$ => $3^k-x= 1$, $3^k+x= p$ => $2\cdot 3^k = p+1$. Dar $2^n+p = y^2$ => $p=(y-2^k)(y+2^k)$ => $y-2^k = 1$, $y+2^k= p$ => $2\cdot 2^k = p-1$ => $3^k-2^k = 1$ => k = 1 => n=2 => 4+ p, 9-p p.perfecte => p = 5.

SUBIECTUL 2.

Pe o tablă sunt scrise n numere naturale. Putem alege oricare două numere dintre cele n numere și le putem înlocui cu modulul diferenței lor . Continuăm procedeul până când pe tablă rămâne un singur număr natural pe care îl notăm cu M. Dacă pe tablă sunt inițial numerele: $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots, n^2$ să se determine valoarea minimă pe care poate să o aibă M în fiecare din situațiile:
a) n = 97 .
b) n = 2019.

SOLUȚIE.

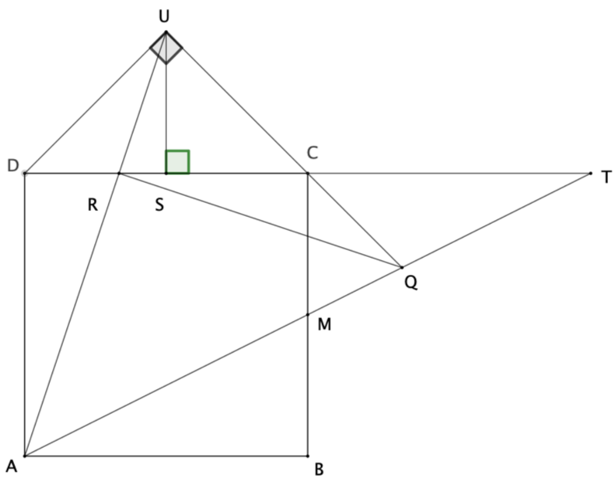
Vom arata ca orice patru nr. nat. consecutive pot fi inlocuite cu un 4.
$(a+1)^2, (a+2)^2, (a+3)^2, (a+4)^2$
$(a+4)^2 - (a+3)^2 = a^2 + 8a + 16 - a^2 - 6a - 9 = 2a+7$
$(a+2)^2 - (a+1)^2 = a^2 + 4a + 4 - a^2 - 2a - 1 = 2a + 3$
$(2a + 7) - (2a + 3) = 4$
Daca avem P,P -> P; P,I -> I; I,I -> P => Nr. de nr. impare ramane neschimbat sau scade cu 2 => nr. de nr. impare isi pastreaza paritatea.
a) n=97 => nr. impare => ultimul nr. va fi impar si cel mai mic posibil va fi 1. Putem obtine un 1 si 4 de 24 de ori. Luam cate 2 de 4 si vom inlocui cu 0 => vom obtine la final 1.
n = 2019 => avem 1010 nr. impare =>ultimul nr. va fi par si cel mai mic posibil este 0. Putem obtine 1 , 4 , 9 , 16 , 25 , 36 , 49 , 4 in restul un nr. par de 4 (502 de 4). Scadem din nr. mari " un nr. par de 4 => obtinem : 1 , 4 , 1, 0 , 1 , 4 , 1 , 4 si restul un nr. par de 4 din care putem obtine numai 0. => ramane 1 , 4 , 1 , 0 , 1 , 4 , 1 , 4 => 1 , 1 , 1 , 1 , 4 =>1 , 1 , 1 , 3 , => 1 , 1 , 2 , =>1 , 1 = 0 => minimul posibil este 0.

SUBIECTUL 3.

Fie ABCD un pătrat și M mijlocul laturii BC. U este un punct în exteriorul pătratului ABCD astfel încât triunghiul CDU să fie dreptunghic isoscel în U.
Notăm CU ∩ AM = {Q} și AU ∩ CD = {R}.
a) Demonstrați că ΔAQR este dreptunghic isoscel.
b) Dacă P este proiecția lui Q pe CD, arătați că N este mijlocul segmentului DP, unde UB ∩ DP = {N}.

SOLUȚIE

a) Ducem US⊥CD => $\frac{RS}{RD} = \frac{1}{2}$
Notam AM∩ CD = {T}, MB=a => AB=2a => CT=2a. In ΔMCT => (T.bis)
$\frac{MQ}{QT} = \frac{CM}{CT} = \frac{1}{2}$ => $\frac{QT}{TM} = \frac{2}{3}$ => $\frac{PQ}{CM} = \frac{2}{3}$ => $PQ = \frac{2a}{3}$ => CP = $\frac{2a}{3}$ => $PT = \frac{4a}{3}$
$\frac{RS}{RD} = \frac{1}{2}$ => RS = $\frac{1}{3} \cdot a$, DR = $\frac{2a}{3}$ =>
$\Delta ADR \equiv \Delta RPQ$ (C.C.) => AR≡RQ si $\widehat{ADR}, \widehat{RPQ}$ complementare => ΔARQ dreptunghic isoscel.



b) DN = $\frac{4a}{3}$, NP = $\frac{4a}{3}$ => DN≡NP.

SUBIECTUL 4.

Fie ABCD un pătrat de latură 1. Un triunghi echilateral se numeşte înscris în pătrat dacă vârfurile sale aparţin laturilor pătratului, inclusiv vârfurilor. Notăm cu p_m şi p_M valoarea minimă , respectiv maximă a perimetrului unui triunghi echilateral înscris în pătratul ABCD.
a) Să se determine p_m şi p_M .
b) Să se demonstreze că pentru orice număr real p , $p_m < p < p_M$ există un triunghi echilateral ΔQRS, înscris în pătratul ABCD astfel încât $p_{\Delta QRS} = p$. (Am notat $p_{\Delta QRS}$ perimetrul ΔQRS).
(Se poate folosi $\sin 75^0 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$).

SOLUȚIE.

a) Deoarece un triunghi inscris are doua varfuri situate pe doua laturi opuse ale patratului => $a \geq 1$, a fiind latura Δ => $P_m=3$ deoarece exista un ΔQRS de latura 1 inscris in patrat ($\frac{\sqrt{3}}{2} < 1$, SQ$\parallel AD$) (Fig.1).
Demonstram ca PM=$3(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ si se atinge de exemplu pentru ΔARS echilateral, R$\in (BC)$, S$\in (CD)$, m($\measuredangle BAR$)= 15^0, (Fig.2)
Presupunem ca exista un ΔMNP, M$\in$(AD), N$\in$(BC), P$\in$(CD) cu $p_{\Delta MNP} > 3(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ si putem pp. AM<BN.
Ducem prin punctul A, AN'$\parallel$MN, N'$\in$ (BC), N'P'$\parallel$NP, N'P'=NP (translatam ΔMNPcu vectorul $\overrightarrow{MA}$) (Fig. 3) => P'$\in$ int ABCD, R$\in$(N'B) deoarece AN'>AR => ΔARN'$\equiv$ ΔASP' (L.U.L) => $\measuredangle$ARN'$\equiv$ $\measuredangle$ASP' => fals => $p_M = 3(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

b) $p_m<p<p_M$ => exista p'$\in$ (BR) astfel incat AP'=$\frac{p}{3}$, R'$\in$ Int ABCD si ΔAP'R' echilateral => $p_{\Delta AP'R'}$=p. Translatam ΔAP'R' pana cand R'$\in$ (CD). Se obtine ΔMNP dorit. (Fig 4).