CONCURS MATE97
SOLUȚII CLASA A VIII-A

SUBIECTUL 1.
Determinați numerele naturale n, m, p care verifică simultan relațiile:
$n+1=2m^2$ și $n^2+1=2p^2$.

SOLUȚIE
$n+1 = 2m^2$ $n^2+1= 2p^2 \Rightarrow n^2-1+2 = 2p^2 \Rightarrow (n-1)(n+1) = 2p^2-2 \Rightarrow (2m^2-2)\cdot 2m^2 = 2(p^2-1) \Rightarrow$
$2(m^2-1)\cdot m^2 = (p-1)(p+1)$ $(m^2-1, m^2) = 1$; $(p-1, p+1) = 1 \Rightarrow$

I. $\underbrace{\begin{matrix} p-1=m^2-1 \\ p+1=2m^2 \end{matrix}}$

$\Downarrow$

$2= m^2+1 \Rightarrow m= 1 \Rightarrow p= 1 \Rightarrow n=1$

II. $\underbrace{\begin{matrix} p-1=m^2 \\ p+1=2m^2-2 \end{matrix}}$

$\Downarrow$

$2= m^2-2 \Rightarrow m= 2 \Rightarrow p= 5 \Rightarrow n=7$

III. $\underbrace{\begin{matrix} p-1=2(m^2-2) \\ p+1=m^2 \end{matrix}}$

$\Downarrow$

$2= 2-m^2 \Rightarrow m= 0$ nu convine.

IV. $\underbrace{\begin{matrix} p-1=2 \\ p+1=(m^2-1)(m^2+1) \end{matrix}}$

$\Downarrow$

$p = 3 \Rightarrow 4 = (m^2-1)(m^2+1)$ nu exista solutii.

SUBIECTUL 2.

În vârfurile unui cub putem pune 1 sau -1 iar pe fiecare față a cubului vom pune produsul numerelor aflate în cele patru vârfuri ale feței respective.
Fie S suma numerelor din cele opt vârfuri ale cubului și a celor șase numere de pe fețele sale. Ce valori poate avea suma S ? Justificați.

SOLUȚIE.

Pp. ca avem n de -1 in cele 8 varfuri ale cubului =. 8-n vor fi egale cu 1.

I. n = par

a) Daca pe o fata avem un numar par de -1 => pe fata opusa avem un numar par de -1 => suma numerelor de pe doua fete opuse este egala cu
$2 = M_4 + 2$.

b) Daca pe o fata avem un numar impus de -1 => pe fata opusa avem un numar impar de -1=> suma de pe cele doua fete opuse este egala cu
$-2 = M_4 + 2$.

$S = 8-2n + M_4+2 = M_4+2$ deoarece n este par.

II. n = impar

Pe o fata avem un nr. parde -1 si pe fata opusa avem un numar impar de -1 => suma nr. de pe cele doua fete opuse este egala cu 0 =>
$S = 8-2n = 8-2(2k+1) = M_4+2$ => S va fi mereu M_4+2 => $S \in \{-14, -10, -6, -2, 2, 6, 10, 14\}$.
Din II Daca n = impar =>$S = 6-4k$ =>se pot obtine 14 (doar cu 1) iar
-14 nu se poate obtine (ar trebui -1 in toate varfurile dar nu ar mai fi -1 pe nicio fata).

Daca punem 2 de 1 pe diagonal cubului si in rest -1 => S = -10.

Daca S = 10, cum $n \neq$ impar => n = 2, dar va mai fi cel putin o fata cu -1 => $S \neq 10$ =>
$S \in \{-10, -6, -2, 2, 6, 14\}$

SUBIECTUL 3.

Fie ABCDA'B'C'D' un paralelipiped oarecare și M un punct în spațiu.
Demonstrați că:
a) $MA^2 + MC^2 + MB'^2 + MD'^2 = MA'^2 + MC'^2 + MB^2 + MD^2$.
b) $MA^2 + MC^2 + MB'^2 + MD'^2 \geq AB^2 + AD^2 + AA'^2$ pentru orice punct M din spațiu. Determinați punctele M pentru care are loc egalitatea.

SOLUȚIE

a) Fie O si intersectia diagonalelor paralelipipedului si O_1 si O_2 centrele bazelor. Aplicam teorema medianei =>

$$\underbrace{\begin{array}{c} 2(MA^2 + MC^2) = 4{MO_1}^2 + AC^2 \\ 2(MB'^2 + MD'^2) = 4{MO_1}'^2 + B'D'^2 \end{array}}$$

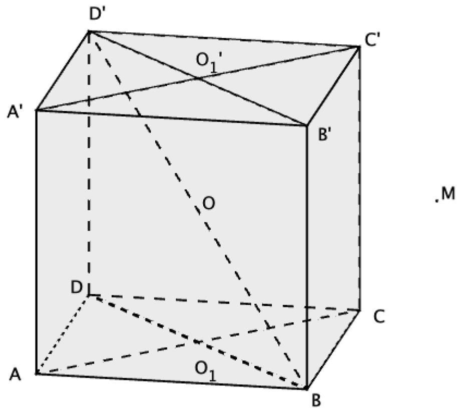
$$\Downarrow$$

2 $(MA^2 + MC^2 + MB'^2 + MD'^2)$ = **4**${MO_1}^2 + 4MO_1'^2 + AC^2 + B'D'^2$

$$\underbrace{\begin{array}{c} 2(MA^2 + MC^2) = 4{MO_1}^2 + A'C'^2 \\ '2(MB^2 + DM^2) = 4{MO_1}^2 + BD^2 \end{array}}$$

$$\Downarrow$$

2 $(MA^2 + MC^2 + MB'^2 + MD^2)$ =
4${MO_1}^2 + MO_1'^2 + A'C'^2 + BD^2$ **=> relatia dorita**



b) $MA^2 + MC^2 + MB'^2 + MD'^2 = 2MO_1^2 + 2MO_1'^2 + \frac{AC^2+B'D'^2}{2}$

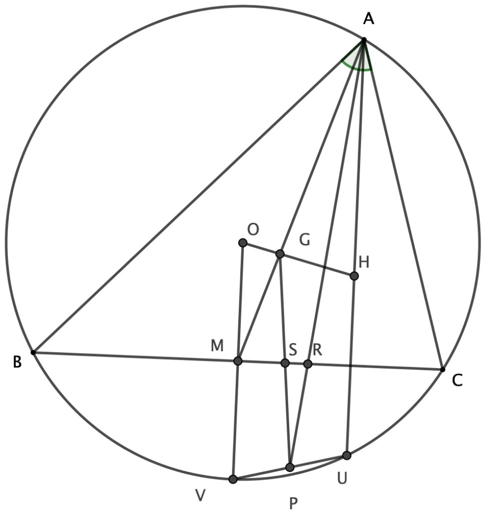
Dar $2MO_1^2 + 2MO_1'^2 = 4MO^2 + O_1D_1'^2 = 4MO^2 + AA'^2$

Dar $AC^2 + B'D'^2 = 2(AB^2 + BC^2) => AB^2 + AD^2 + AA'^2$.

Egalitatea are loc ⇔ M=O.

SUBIECTUL 4.

Fie ΔABC un triunghi ascuțitunghic, cu m(∠BAC)= 60^0 dar care nu este echilateral. Înălțimea din A și bisectoarea interioară din A a triunghiului ABC intersectează cercul circumscris acestuia în punctele U, respectiv V. Punctul P este situat pe segmentul UV astfel încât UP = 2VP. Dacă notăm AP ∩ BC ={R}, calculați raportul $\frac{AR}{RP}$.



SOLUȚIE.

Notam OV ∩ BC = {M},

AM ∩ OH = {G},

PG ∩ BC = {S}.

Stim ca DU ≡ HD. Vom arata ca daca $\hat{A} = 60^0$ => OM ≡ OV.

$\widehat{OCB}$ **= 30^0 (in Δ isoscel OBC),**

$\widehat{BCV} \equiv \widehat{BAV}$ **= 30^0 => CM inaltime si bisectoare in ΔOCV => CM mediana => OM ≡ MV. Se stie ca GH = 2OG => G si P sunt simetrice fata de BC.**

ΔARD ΔPRS (U.U.) =>

$$\frac{AR}{RP} = \frac{AD}{SP} = \frac{AD}{SG} = \frac{AM}{MG} = 3$$