Rezolvari clasa a V-a

1. $1+2+3+\ldots+40+41=861$

   $\frac{861-x}{40}=\overline{ab},75 \Rightarrow 861-x = 40\cdot \overline{ab}+40\cdot 0,75 \Rightarrow 861-30-x= 40\cdot \overline{ab} \Rightarrow 831-x = 40\cdot ab \Rightarrow 40|831-x.$

   Dar $40|800 \Rightarrow 40|31-x \Rightarrow x=31$, $\overline{ab}=20$,

2. a) i) $n=2k \Rightarrow u(4^{n+1}+9^{n}) = u(4+1)=5$

   $u(4^{n}+9^{n+1}) = u(6+9)=5$

   fractia se simplifica cu 5.

   ii) $n=2k+1 \Rightarrow u(4^{n+1}+9^{n})=u(6+9)=5$

   $u(4^{n}+9^{n+1})=u(4+1)=5$

   fractia se simplifica cu 5.

   b) Vom arata ca $0,1<\frac{4^{n+1}+9^{n}}{4^{n}+9^{n+1}}<0,2 \Leftrightarrow 4^{n}+9^{n+1}<10(4^{n+1}+9^{n})$ si $5(4^{n+1}+9^{n})< 4^{n}+9^{n+1} \Leftrightarrow 0<39\cdot 4^{n}+9^{n}$ (A) si $20\cdot 4^{n}+5\cdot 9^{n}<4^{n}+9\cdot 9^{n} \Leftrightarrow 19\cdot 4^{n}<4\cdot 9^{n}\ |:4 \Leftrightarrow 19\cdot 4^{n-1}<9^{n} \Leftrightarrow 76\cdot 4^{n-2}<81\cdot 9^{n-2} (\forall)\ n\geq 2.$

3. Notam $d_1>d_2<d_3$ cei mai mari 3 divizori proprii ai lui n.

   a) Presupunem prin absurd ca n este impar $\Rightarrow d_1\leq \frac{n}{3}, d_2\leq \frac{n}{5}, d_3\leq \frac{n}{7} \Rightarrow n=d_1+d_2+d_3 \leq \frac{n}{3}+\frac{n}{5}+\frac{n}{7} \Rightarrow 1\leq \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\Rightarrow 1\leq \frac{71}{105}$ (contradictie) $\Rightarrow$ n=par $\Rightarrow d_1=\frac{n}{2}$

   b) Presupunem prin absurd ca $3\nmid n \Rightarrow d_2\leq \frac{n}{4}, d_3\leq \frac{n}{5} \Rightarrow n=d_1+d_2+d_3 \leq \frac{n}{2}+\frac{n}{4}+\frac{n}{5} \Rightarrow 1\leq \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5} \Rightarrow 1\leq \frac{19}{20}$ (contradictie) $\Rightarrow n\,\vdots\,3 \Rightarrow d_2=\frac{n}{3}$

   c) $\Rightarrow d_3= n-\frac{n}{2}-\frac{n}{3}-\frac{n}{3}=\frac{n}{6} \Rightarrow 4\nmid n$ si $5\nmid n \Rightarrow n=6k, k=2p+1 \Rightarrow n=12p+6, p\neq M_5+2$ n=6 nu are 3 divizori proprii $\Rightarrow p \in\{1,2,3,\ldots,167\}$ si $p \notin\{5\cdot 0+2,5\cdot 1+2,\ldots,5\cdot 33+2\} \Rightarrow 167-34=133$ nr.superlativ.

4. Pentru ca o linie sa fie bună ea trebuie să aibă cel puțin 5 pătrățele colorate. Dacă am avea 9 linii orizontale sau verticale bune => minim 9x5=45 pătrățele colorate >40 contradicție => maxim 8 linii bune pe orizontală si maxim 8 linii bune pe verticală. Un exemplu de colorare bună este in figura alăturată.