Barem orientativ. Clasa a VIII-a

1) a) $p = a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 = (a^2 - 2a + 2)(a^2 + 2a + 2)$
$a^2 - 2a + 2 = (a-1)^2 + 1 > 1$ dacă $a \geq 2 \Rightarrow p$ este compus
$\Rightarrow a = 1, p = 5$ unica soluție.
b) $24^{13} = 2^{39} \cdot 3^{13}$
Cazul general $n = p^r \cdot q^s \Rightarrow n^2 = p^{2r} \cdot q^{2s} \Rightarrow$
n^2 are $(2r+1) \cdot (2s+1)$ divizori.
$d \left| n^2, d < n \Leftrightarrow \frac{n^2}{d} \right| n^2, n < \frac{n^2}{d} < n^2$
$\Rightarrow$ există $\frac{(2r+1)(2s+1)-1}{2} = 2rs + s + r$ divizori ai lui n^2 și $< n$
Dar n are $(r+1)(s+1)$ divizori, inclusiv $n \Rightarrow n^2$ are $2rs + r + s - (rs + r + s) = rs$ divizori, $< n$ și care nu sunt divizori ai lui n.
Deci 24^{13} are $39 \cdot 13 = 507$ divizor ce respectă cerințe.

2) $z = 1 - x - y \Rightarrow z + xy = 1 - x - y + xy = (1-x)(1-y) = (y+z)(x+z)$
$\Rightarrow \sum \sqrt{\frac{xy}{z+xy}} = \sum \sqrt{\frac{x}{x+z} \cdot \frac{y}{y+z}} \leq \frac{1}{2} \sum \left(\frac{x}{x+z} + \frac{y}{y+z}\right) = \frac{1}{2} \sum \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y}\right) = \frac{3}{2}$

3) ABNM inscriptibil $\Rightarrow VM \cdot VA = VN \cdot VB$
BCPN inscriptibil $\Rightarrow VN \cdot VB = VP \cdot VC$
$VM \cdot VA = VP \cdot VC \Rightarrow ACPM$ inscriptibil

4) a) De exemplu tetraedrele

$ABDA`,\ BCDC`,\ DA`D`C`,\ A`BC`B`,\ A`B`C`D$

b) Fie cubul de muchie a descompus în 4 tetraedre (prin reducere la absurd)

Cel puțin 2 tetraedre au baza pe fața $ABCD$ ($ABCD$ nu poate fi bază pentru un tetraedru)

Analog există cel puțin 2 tetraedre care au baza pe fața $A`B`C`D`$

Deoarece un tetraedru nu are fețe paralele $\Rightarrow$ cele 4 tetraedre sunt tetraedrele descompunerii.

Aceste 4 tetraedre nu pot „umple” cubul deoarece suma volumelor lor $\leq 4 \cdot \frac{\frac{a^2}{2} \cdot a}{3} = \frac{2a^3}{3} < a^3$