Scoala Gimnaziala nr. 97
Bucuresti, sector 4

Concurs MATE

Turneul Olimpicilor

Clasa a VII-a

18 Mai 2019

1) Să se afle numerele naturale n și p știind că p este prim și numerele $2^n + p$ și $3^n - p$ sunt simultan pătrate perfecte.

2) Pe o tablă sunt scrise n numere naturale. Putem alege oricare două numere dintre cele n numere și le putem înlocui cu modulul diferenței lor . Continuăm procedeul până când pe tablă rămâne un singur număr natural pe care îl notăm cu M. Dacă pe tablă sunt inițial numerele: 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, ….. , n^2 să se determine valoarea minimă pe care poate să o aibă M în fiecare din situațiile:
a) n = 97 .
b) n = 2019.

3) Fie ABCD un pătrat și M mijlocul laturii BC. U este un punct în exteriorul pătratului ABCD astfel încât triunghiul CDU să fie dreptunghic isoscel în U.
Notăm $CU \cap AM = \{Q\}$ și $AU \cap CD = \{R\}$.
a) Demonstrați că ΔAQR este dreptunghic isoscel.
b) Dacă P este proiecția lui Q pe CD, arătați că N este mijlocul segmentului DP, unde $UB \cap DP = \{N\}$.

4) Fie ABCD un pătrat de latură 1. Un triunghi echilateral se numeşte înscris în pătrat dacă vârfurile sale aparţin laturilor pătratului, inclusiv vârfurilor. Notăm cu p_m şi p_M valoarea minimă , respectiv maximă a perimetrului unui triunghi echilateral înscris în pătratul ABCD.
a) Să se determine p_m şi p_M .
b) Să se demonstreze că pentru orice număr real p , $p_m < p < p_M$ există un triunghi echilateral ΔQRS, înscris în pătratul ABCD astfel încât $p_{\Delta QRS} = p$. (Am notat $p_{\Delta QRS}$ perimetrul ΔQRS).
(Se poate folosi $\sin 75^0 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$).

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare problemă se punctează corespunzator de la 0 la 7 puncte.