Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România — **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**

Filiala Galaţi — **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude” , ediţia a X-a

Galaţi, 31 octombrie 2009

Clasa a VII-a

SOLUŢII

Problema 1.

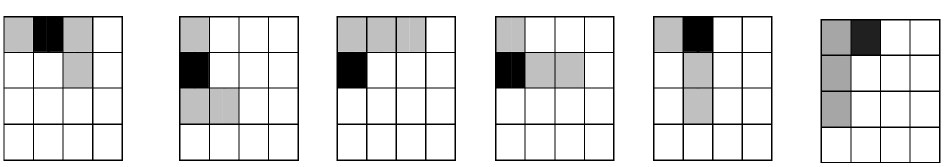
Soluţie. a) Avem că $\frac{1}{7}-\frac{1}{9}=\frac{9-7}{7\cdot 9}=\frac{2}{7\cdot 9}$ şi $\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\frac{2}{7\cdot 9}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$.

b) Notăm cu $x_1, x_2, ..., x_{100}$ numerele cerute şi avem că $\frac{x_1}{\frac{1}{1\cdot 3}}=\frac{x_2}{\frac{1}{3\cdot 5}}=...=\frac{x_{100}}{\frac{1}{199\cdot 201}}$, de unde rezultă $\frac{x_1}{\frac{1}{1\cdot 3}}=\frac{x_2}{\frac{1}{3\cdot 5}}=...=\frac{x_{100}}{\frac{1}{199\cdot 200}}=\frac{x_1+x_2+...+x_{100}}{\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{199\cdot 200}}$. Dar, prin calcul, obţinem $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{199\cdot 201}=$ $=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{199}-\frac{1}{201}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{201}\right)=\frac{100}{201}$. Prin urmare, avem că $1\cdot 3\cdot x_1=3\cdot 5\cdot x_2=...=$ $=199\cdot 201\cdot x_{100}=201$, de unde rezultă că $x_1=\frac{201}{1\cdot 3}$, $x_2=\frac{201}{3\cdot 5}, ..., x_{100}=\frac{201}{199\cdot 201}$.

Problema 2.

Soluţie. a) Printr-un procedeu suma numerelor din tabel se măreşte cu 4. Prin aplicarea procedeului de două ori suma numerelor din tabel se măreşte cu 8. Iniţial suma numerelor din tabel a fost egală cu zero, iar în final suma numerelor din tabel este egală cu 8.

b) Dacă aplicăm de k ori procedeul, suma numerelor din tabel este egală cu $4\cdot k$, deci se divide cu 4. În prima configuraţie suma numerelor din tabel este egală cu 91 şi acest număr nu este divizibil cu 4, de unde rezultă că prima configuraţie nu poate fi obţinută. În cea de-a doua configuraţie suma numerelor este egală cu 92, deci se divide cu 4. Observăm că într-un colţ al pătratului putem aşeza piesa în şase moduri:



Pentru a obţine 9 în colţul din stânga sus trebuie să aplicăm procedeul de 9 ori. Indiferent cum aşezăm piesa în colţul din stânga sus, după aplicarea a 9 ori a procedeului, suma numerelor din căsuţele din dreapta lui 9 şi sub 9 trebuie să mai mare sau egală cu 9. În cazul nostru $3+5=8<9$.

9	**5**	7	3
3	2	6	5
6	3	9	6
8	4	7	9

Rezultă că nici a doua configuraţie nu poate fi obţinută.

Problema 3

Soluţie. a) Prin calcul, avem că $r=\overline{a,(ba)}+\overline{b,(ab)}+\overline{a,b(a)}=\dfrac{\overline{aba}-a}{99}+\dfrac{\overline{bab}-b}{99}+\dfrac{\overline{aba}-\overline{ab}}{90}=\dfrac{110\cdot a+110\cdot b}{99}+$ $+\dfrac{91\cdot a+9\cdot b}{90}=\dfrac{191\cdot a+109\cdot b}{90}$. Pentru ca fracţia zecimală să fie finită este necesar ca 9 să dividă numărul natural $191\cdot a+109\cdot b$, ceea ce este echivalent cu 9 divide $2\cdot a+b$. Dar, $3\le 2\cdot a+b\le 25$, de unde rezultă că $2\cdot a+b=9$ sau $2\cdot a+b=18$.

Deci, $(a;b)\in\{(1;7),(2;5),(3;3),(4;1),(5;8),(6;6),(7;4),(8;2)\}$.

b) Notăm cu I intersecţia bisectoarelor triunghiului ΔABC. Din ipoteză avem că $m(\sphericalangle A)=120^\circ$ şi $m(\sphericalangle C)=20^\circ$, de unde rezultă că $m(\sphericalangle B)=180^\circ-m(\sphericalangle A)-m(\sphericalangle C)=40^\circ$. Din faptul că $(BI$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$ de măsură egală cu 40° obţinem că $m(\sphericalangle ABI)=20^\circ$. Din triunghiul ΔABD obţinem că $m(\sphericalangle ADB)=80^\circ$ şi aplicând teorema unghiului exterior în triunghiul ΔABI obţinem că $m(\sphericalangle BID)=20^\circ$, deci triunghiul ΔBID este isoscel. Prin urmare, $[BI]\equiv[BD]\equiv[CE]$. Din relaţiile $[BI]\equiv[CE]$, $[BC]\equiv[BC]$ şi $\sphericalangle IBD\equiv\sphericalangle BCE$ rezultă că $\Delta BIC\equiv\Delta CEB$, deci $m(\sphericalangle EBC)=m(\sphericalangle ICB)=10^\circ$.