Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**
Filiala Galaţi **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude” , ediţia a X-a
Galaţi, 31 octombrie 2009

Clasa a VIII-a

SOLUŢII

Problema 1.

Soluţie. a) Ecuaţia devine $\sqrt{(x+1)^2+25}+\sqrt{(y-4)^2+9}+\sqrt{(z-5)^2+36}=14$ de unde $x=-1, y=4, z=5$

b) $a-b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})\in\mathbb{Z}$**,** iar $\sqrt{a}+\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$, rezultă $\sqrt{a}-\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$, deci $(\sqrt{a}+\sqrt{b})+(\sqrt{a}-\sqrt{b})=2\cdot\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$, de unde $\sqrt{a}\in\mathbb{Q}, \sqrt{b}\in\mathbb{Q}$. Dacă

$\sqrt{a}=\dfrac{m}{n}$, $m,n\in\mathbb{N}, n\neq 0$, $(m,n)=1$ rezultă $a=\dfrac{m^2}{n^2}\in\mathbb{N}$, deci n^2 / m^2 şi cum $(n^2,m^2)=1$, rezultă $n^2=1$, deci $n=1$.

Aşadar $\sqrt{a}\in\mathbb{N}$; analog $\sqrt{b}\in\mathbb{N}$.

c) Conform punctului **b)** se obţine $n=k^2, k\in\mathbb{N}$ şi $n+2009=l^2, l\in\mathbb{N}, k<l$. Prin scăderea celor doua relaţii rezultă $(l-k)\cdot(l+k)=2009=7^2\cdot 41$, de unde $(l,k)\in\{(1005,1004);(147,140);(45,4)\}$.

Se obţine $n\in\{1004^2;140^2;16\}$

Problema 2.

Soluţie. a) Inegalitatea de demonstrat se scrie astfel :

$(x-1)^{12}-(x-1)^7+x^2-2x+1-x+1+1>0 \Leftrightarrow (x-1)^{12}-(x-1)^7+(x-1)^2-(x-1)+1>0$.

Notăm $x-1=y$ şi atunci avem de demonstrat că $P(y)=y^{12}-y^7+y^2-y+1>0, \ \forall y\in\mathbb{R}$.

Avem următoarele cazuri:

Cazul 1

Dacă $y\le 0$, atunci $y^{12}\ge 0, -y^7\ge 0, y^2\ge 0, -y\ge 0, 1>0$, de unde $P(y)>0$

Cazul 2

Dacă $y\in(0;1]$, rezultă $0<y^n\le 1, \forall n\in\mathbb{N}$. Avem $P(y)=y^{12}+y^2\cdot(1-y^5)+(1-y)$ şi cum $y^{12}>0, y^2\cdot(1-y^5)\ge 0, 1-y\ge 0$, rezultă $P(y)>0$

Cazul 3

Dacă $y>1$, atunci $y^n>1, \ \forall n\in\mathbb{N}^*$ şi $P(y)=y^7\cdot(y^5-1)+y\cdot(y-1)+1$.

Deoarece $y^7\cdot(y^5-1)>0, y\cdot(y-1)>0, 1>0$, rezultă $P(y)>0$.

Aşadar, $y^{12}-y^7+y^2-y+1>0, \forall y\in\mathbb{R}$ de unde rezultă concluzia problemei.

b) Au loc următoarele egalităţi:

$$b\cdot c=\frac{2\cdot b\cdot c}{2}=\frac{b^2+2b\cdot c+c^2-b^2-c^2}{2}=\frac{(b+c)^2-(b^2+c^2)}{2}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2}=\frac{(b+c+a)\cdot(b+c-a)}{2}=$$
$$=(b+c+a)\cdot\frac{b+c-a}{2}.$$

Dar $\frac{b+c-a}{2}\in\mathbb{N}^*,$ căci, având $a^2=b^2+c^2,$ deducem sau că cele trei numere sunt pare, sau că două sunt impare si celălalt par. Evident, nu pot fi toate trei impare si nici două pare si unul impar.

Aşadar, $b\cdot c=(b+c+a)\cdot n,$ unde $n=\frac{b+c-a}{2}\in\mathbb{N}^*,$ deci, $a+b+c$ divide $b\cdot c$

Problema 3

Soluție. a) Fie B intersecția paralelei prin A la OY cu (OX si C intersecția paralelei prin A la OX cu (OY. Avem $B\in(OM),C\in(OM)$. Notăm OB=a, OC=b, BM =x, CN =y $,m(\sphericalangle XOY)=\alpha$. $\mathrm{A}(OMN)=A(OBAC)+A(ABM)+A(ACN),$ iar $A(OBAC)=const.\Rightarrow A(ABM)+A(ACN)=\min.,$

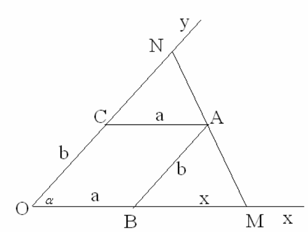
unde $A(ABM)=\frac{b\cdot x\cdot\sin\alpha}{2},A(ACN)=\frac{a\cdot y\cdot\sin\alpha}{2}$, iar din

$\Delta ABM\sim\Delta NCA,$

rezultă $\frac{x}{a}=\frac{b}{y}$, deci $y=\frac{a\cdot b}{x}$. Se obține:

$$A(ABM)+A(ACN)=\frac{\sin\alpha}{2}\cdot(b\cdot x+a\cdot y)=$$
$$=\frac{\sin\alpha}{2}\cdot(b\cdot x+\frac{a^2\cdot b}{x})=\frac{b\cdot\sin\alpha}{2}\cdot(x+\frac{a^2}{x})=\min.$$

atunci



când $x+\frac{a^2}{x}=\min.$

Dar $x+\frac{a^2}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{a^2}{x}}=2\cdot a,$ cu egalitate pentru $x=\frac{a^2}{x},$ adică $x=a$ şi implicit $y=b$.

Minimul se atinge pentru $M=S_B(O),N=S_C(O)$

b) Aria hexagonului regulat este $A=\frac{3\cdot R^2\cdot\sqrt{3}}{2}$, unde $R=l_6$

Impărțim suprafața hexagonului în 48 suprafețe triunghiulare echivalente de arie $\frac{R^2\cdot\sqrt{3}}{32}cm^2$, ca în figura alaturatã. Conform principiului cutiei (Dirichlet), din cele 97 puncte vor exista 3 puncte care să aparțină uneia din cele 48 de suprafețe triunghiulare. Evident, aria triunghiului determinat de cele 3 puncte este cel mult egală cu $\frac{R^2\cdot\sqrt{3}}{32}cm^2$.