Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Filiala Galaţi

Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri"
str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude"
ediţia a X-a
Galaţi, 31 octombrie 2009

Clasa a VIII-a

Problema 1.

a) Să se determine numerele reale x, y şi z care verifică egalitatea

$$\sqrt{x^2+2\cdot x+26}+\sqrt{y^2-8\cdot y+25}+\sqrt{z^2-10\cdot z+61}=14.$$

b) Dacă numerele naturale a, b verifică proprietatea $\sqrt{a}+\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$, să se demonstreze că $\sqrt{a}\in\mathbb{N}$ şi $\sqrt{b}\in\mathbb{N}$.

c) Să se determine numărul natural n ştiind că $\sqrt{n}+\sqrt{n+2009}\in\mathbb{Q}$.

Problema 2.

a) Să se demonstreze că $(x-1)^{12}-(x-1)^7+x^2-3\cdot x+3>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că dacă $a,b,c\in\mathbb{N}^*$ şi $a^2=b^2+c^2$, atunci $a+b+c$ divide $b\cdot c$.

Problema 3.

a) Se consideră unghiul $\sphericalangle XOY$ şi punctul A situat în interiorul unghiului. O dreaptă oarecare ce conţine punctul A intersectează semidreptele $(OX$, $(OY$ în punctele M, respectiv N. Să se determine poziţia dreptei MN pentru care aria triunghiului ΔOMN este minimă.

b) În interiorul unui hexagon regulat cu lungimea laturii $R\,cm$ sunt situate 97 puncte distincte, oricare trei din ele necoliniare. Să se demonstreze că există un triunghi cu vârfurile în aceste puncte, de arie cel mult egală cu $\dfrac{R^2\cdot\sqrt{3}}{32}cm^2$.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.
Pentru fiecare subiect se acordă maximum 7 puncte.
Nu se acordă nici un punct din oficiu. Fiecare teză va fi evaluată cu un punctaj de la 0 la 21 puncte.
Timp de lucru : 3 ore