Rezolvari clasa a VIII-a

1. $5-2\sqrt{5y-y^2-x}-\frac{x}{y}+5-2\sqrt{5x-x^2-y}-\frac{y}{x}=0$

$\Rightarrow \frac{5y-x}{y}-2\sqrt{5y-y^2-x}+\frac{5x-y}{x}-2\sqrt{5x-x^2-y}=0$

$\Rightarrow \left(\frac{5y-x-y^2}{y}-2\sqrt{5y-y^2-x}+y\right)+\left(\frac{5x-y-x^2}{x}-2\sqrt{5x-x^2-y}+x\right)=0$

$\Rightarrow \left(\sqrt{\frac{5y-x-y^2}{y}}-\sqrt{y}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{5x-y-x^2}{x}}-\sqrt{x}\right)^2=0 \Rightarrow$

$\begin{cases} 5y-x=2y^2 \\ 5x-y=2x^2 \end{cases} \rightarrow 2(y-x)(y+x)=6(y-x) \Rightarrow$

i) $y=x \Rightarrow 4x=2x^2$, $x\neq 0$

ii) $y+x=3 \Rightarrow y=3-x \Rightarrow 5x-3+x=2x^2 \Rightarrow 2x^2-6x+3=0$, $\Delta=36-24=12 \Rightarrow x_1=\frac{6+\sqrt{12}}{4}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$,

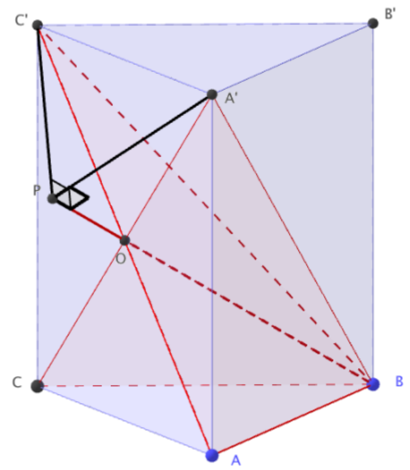
$x_2=\frac{6-\sqrt{12}}{4}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$, $y_1=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$, $y_2=\frac{3-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S=\left\{(2,2);\ \left(\frac{3+\sqrt{3}}{2},\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2},\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$

2. Presupunem că exista $a_1, a_2, \ldots, a_{2019}$ numere nu toate egale si care au suma minimă S. $S-a_i=2\cdot s$ $\Rightarrow S\equiv a_i \pmod 2$ $(\forall)i$ => toate sunt nr. pare sau toate sunt nr. impare =>

i) Dacă toate sunt pare => $a_1, a_2, \ldots, a_{2019}$ îndeplinește cerința și au suma $\frac{S}{2}<S$ in contradicție cu minimalitatea lui S.

ii) toate impare => $\frac{a_1+1}{2}, \frac{a_2+1}{2}, \ldots, \frac{a_{2019}+1}{2}$ verifică cerința și contrazice minimalitatea.

3.



Notăm AB=a, BB'=B

$(A'BC)\cap(ABC')$ = BO

Deducem $A'P\perp BO$ => $C'P\perp BO$ => $\sphericalangle((ABC'),(A'BC))=\sphericalangle\widehat{A'PC'}$ sau suplementul acestuia.

Dar $\sphericalangle A'PC=90^0 \Leftrightarrow M'P=\frac{A'C'}{2} \Leftrightarrow \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{b}{2}}{\frac{\sqrt{3a^2+b^2}}{2}} \Leftrightarrow b\sqrt{3}=\sqrt{3a^2+b^2} \Leftrightarrow 3a^2=2b^2 \Leftrightarrow \frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow$

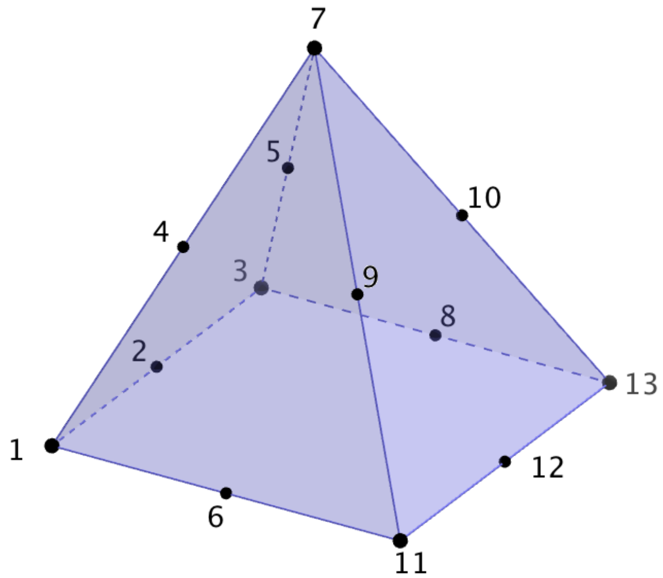
$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\Delta OPM' \sim \Delta OMB$ (U.U.) $\Rightarrow \frac{M'P}{MB}=\frac{OM'}{OB}$, $MB=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $OB=\sqrt{\frac{3a^2+b^2}{4}}=\sqrt{\frac{3a^2+b^2}{2}}$

b) i) $\widehat{A'PC'}=60^0 \Leftrightarrow PM'=\frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow PM'\equiv MB \Rightarrow M'O\equiv OB \Rightarrow MO\equiv OB$ (contradicție).

ii) $\widehat{A'PC'}=120^0 \Leftrightarrow PM'=\frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{b}{\sqrt{3a^2+b^2}} \Rightarrow 3b=\sqrt{3a^2+b^2} \Rightarrow 8b^2=3a^2 \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

4. a) Un exemplu de piramidă patrulateră bună.



b) Daca baza are 2k+1 vârfuri => 4k+2 numere sunt la bază și 2k+2 numere ce nu sunt la bază => 6k+4 numere în total.

Extremele 1 și 6k+4 nu pot fi în mijloc deoarece nu pot fi medii aritmetice => ele sunt in vârfuri => 1 în vârf => în toate vârfurile sunt numere impare => Dar 6k+4 trebuie să fie în vârf => contradicție => nu se poate.