MATE 97 – TURNEUL OLIMPICILOR

<u>Soluții clasa a 5-a</u>

1) $\overline{bcd} \vdots 5$, d$\neq 0$ => d = 5, $\overline{abc} \vdots 4$ => c cifră pară => c = 2 sau c = 4

   i) c = 2 => $\overline{25e} \vdots 3$ => 7 + e $\vdots$ 3, $8 \leq 7 + e \leq 11$ => 7 + e = 9 => e = 2 => c = e fals.

   ii) c = 4 => $\overline{45e} \vdots 3$ => 9 + e $\vdots$ 3 => e $\vdots$ 3 => e = 3

   iii) $\overline{abc} \vdots 4$ => $\overline{bc} \vdots 4$ = > $\overline{b4} \vdots 4$ => b = 2 => a = 1

$\overline{abcde}$ = 12453 este numărul căutat.

2) Multiplii nenuli ai lui d mai mici sau egali cu n sunt:

   d · 1, d · 2, d · 3, ..., d · m, unde m = $\frac{n}{d}$.

M(d) = $\frac{d(1+2+3+\ldots+m)}{m} = \frac{\frac{d \cdot m(m+1)}{2}}{m} = \frac{d \cdot (m+1)}{2}$

a) Deoarece n impar => d și m impare => m+1 par => m+1$\vdots$ 2 => M(d) nr. natural.

b) Numărul M(d) = $\frac{d(m+1)}{2}$ nu este natural dacă și numai dacă d și m+1 sunt numere impare, adică d impar și m par.

   Deci pentru n număr par dacă există d $\neq 1$ un divizor impar atunci M(d) nu este natural.

   Aceasta se întâmplă dacă nr. n este par și nu este putere a lui 2.

   Pentru n = 2^k, k$\geq$ 3, pentru orice divizor d propriu M(d) este nr. natural.

   Rezultă că trebuie să numărăm numerele pare de 3 cifre care nu sunt puteri ale lui 2.

   Avem 999 – 99 = 900 nr. de 3 cifre și 900 : 2 = 450 numere pare și avem 3 puteri ale lui 2 de 3 cifre: 2^7 , 2^8, 2^9 => 450 – 3 = 447 de numere.

3) $\frac{\overline{abc}}{1000} = \frac{a}{a+b+c} \Leftrightarrow 1000a = \overline{abc}\ (a+b+c) \geq 100a\ (a+b+c) \Rightarrow 10 \geq a+b+c \cdot (x)$

$1000a = 100a\ (a+b+c) + \overline{bc}\ (a+b+c)$

$100a\ (10a - a - b - c) = \overline{bc}\ (a+b+c) < 100 \cdot\ 10(din\ x)$

$a\ (9a - b - c) < 10$

Dacă $a \geq 3 \Rightarrow a\ (9a - b - c) \geq 3 \cdot (27 - 9 - 9) \Rightarrow 10 > 3 \cdot 9 = 27$ Fals.

Dacă $a = 2 \Rightarrow 2(18 - b - c) < 10 \Rightarrow 18 - b - c < 5 \Rightarrow 13 < b+c$ Fals

(din(x)) => a = 1.

$\Rightarrow 1000 = \overline{1bc}\ (a+b+c) \Rightarrow \overline{1bc} \mid 1000$

$1000 = 2^3 \cdot 5^3 \Rightarrow \overline{1bc} \in \{100, 125\}$. Verifică doar $\overline{1bc} = 125$ => soluție unică.

4) Punctele având aceeași paritate nu se unesc inițial cu segmente. Orice două puncte având parități diferite se unesc cu un segment.

Dacă a și b au parități diferite, să spunem a par și b impar.

Dacă a > b atunci "a se unește cu b" iar dacă b > a atunci "b se unește cu a".

a) Cum avem 50 de puncte pare și 50 de puncte impare vom avea $50 \cdot 50 = 2500$ segmente inițial.

b) Oricum am alege 3 puncte de pe cerc două vor avea aceeași paritate (din principiul cutiei) și deci nu există segment între ele, deci cele 3 puncte nu determină un triunghi având laturile printer segmentele desenate

c) Dacă două puncte a și b nu au fost unite înseamnă că au aceeași paritate. Dacă c are aceeași paritate cu a și b, $c \neq a$, $c \neq b$ nu există segment între c și a => nu se formează triunghi cu cele 3 puncte.

Dacă c are paritate diferită de a lui a și b, avem segmente între a și c și între b și c deci se formează un triunghi. Înseamnă că a și b formează triunghiuri cu toate vârfurile c de paritate diferită cu a lui a și b și doar cu acestea. Cum sunt 50 de numere de fiecare paritate, se formează 50 de triunghiuri.