MATE 97 – TURNEUL OLIMPICILOR

Soluții clasa a 6-a

1) a) $\frac{3}{7} = \frac{18}{42} = \frac{14+3+1}{42} = \frac{14}{42} + \frac{3}{42} + \frac{1}{42} = \frac{1}{3} + \frac{1}{14} + \frac{1}{42}$, a = 3, b = 4, c=42

   b) Presupunem că există a, b ∈ ℕ astfel încât $\frac{3}{7} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ => 3ab = 7(a+b)

   => 3ab = 7a+7b => 3ab – 7a = 7b => a (3b-7) = 7b => 3b -7 > 0 și

   3b – 7 $|7b$; dar 3b – 7 $|3b - 7b$ => 3b – 7 $|[21b - (21b - 49)]$ =>

   3b – 7 $|49$, 3b – 7 > 0 => 3b – 7 ∈ {1, 7, 49} => 3b ∈ {8, 14, 56} =>

   => b ∉ ℕ, deci nu există.

2) a) Dacă A are un element => A = {2}. Dacă A are 2 elemente =>

   A = {a, e+2} => {1, 3}, {2, 4}, {3, 5}, {4, 6}, {5, 7}.

   Dacă A are 3 elemente, A = {a, b, c}; a > b > c => a – b + c = 2 =>

   a – b = 1, c – d = 1 => A = {d, d+1, b, b+1} => {1, 2, 3, 4}; {1, 2, 4, 5}; {1, 2, 5, 6}; {1, 2, 6, 7}; {2, 3, 4, 5}; {2, 3, 5, 6}; {2, 3, 6, 7}; {3, 4, 5, 6}; {3, 4, 6, 7}; {4, 5, 6, 7}.

   Dacă A are mai mult de 5 elemente => A = {a, b, c, d, e}

   a > b > c > d > e => S(A) ≥ 3.

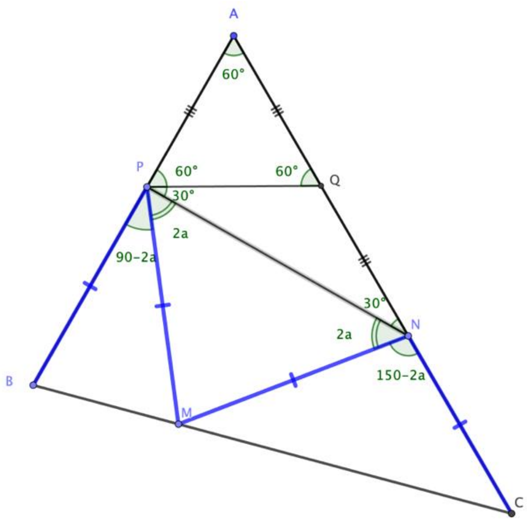
   b) Fiecare submulțime A ⊂ M care nu are pe 7 element o punem în pereche cu mulțimea A ∪ {7} introducem și Ø cu S (Ø) = 0 nu schimbă suma finală. Cum avem 2^7 = 128 de submulțimi => vom avea 64 de perechi.

   Dacă A = {a_1, a_2, ..., a_k} cu $a_1 > a_2 > ... > a_k$ => S (A) = $a_1 - a_2 + a_3 - a_4$ .... iar S(A∪{7}) + S(A) = 7 => suma tuturor sumelor alternate va fi

   64 · 7 = 448.

3) Fie a și b două numere dintre cele consecutive care nu sunt prime între ele, a > b.

d | a, d | b => d | a – b => d ∈ {2, 3, 4, ..., 9} => a și b trebuie să fie divizibile cu 2, 3, 5 sau 7. Pentru a rezolva problema este suficient să arătăm că din oricare 10 numere naturale consecutive există întodeauna unul care să nu fie divizibil nici cu 2, nici cu 3, nici cu 5, nici cu 7. Dar din 10 numere consecutive 5 sunt pare. Dintre cele 5 impare cel mult două sunt divizibile cu 3, unul este divizibil cu 7, deci vom găsi un număr care să nu fie divizibil cu 2, 3, 5, 7 și deci respectă cerințe.



4) Fie Q mijlocul AN => AP ≡ AQ, $\hat{A}$ = 60^0 => ΔAPQ echilateral =>

PQ ≡ AQ ≡ QN, $\widehat{AQP}$ = 60^0, ΔOPN isoscel => $\widehat{QPN}$ = $\widehat{QNP}$ = 30^0

ΔMNP isoscel => $\widehat{MPN}$ = $\widehat{MNP}$ = 2a => $\widehat{MPB}$ = 90^0 – 2a și $\widehat{MNC}$ = 150^0 – 2a

ΔPBM isoscel, ΔNMC isoscel => $\hat{B}$ = 45^0 + a, $\hat{C}$ = 15^0 + a

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$ = 180^0 => 60^0 + 2A = 120^0 => 2a = 60^0 => a = 30^0 => $\hat{A}$ = 60^0, $\hat{B}$ = 75^0, $\hat{C}$ = 45^0.