MATE 97 – TURNEUL OLIMPICILOR

Soluții clasa a 7-a

1. a) $\sqrt{n(n+p} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow$ n(n+p) pătrat perfect.

   d = n(n+p) => d | n + p – n => d | p => d ∈ {1, p}.

   i. Dacă d = p => n = p · k => p^2 · k(k+1) pătrat perfect =>

      k(k+1) pătrat perfect k ≠ 0 => contradicție

   ii. Dacă d = 1 => n + p = a^2, n = b^2 =>

      p = $a^2 - b^2$ = (a – b)(a + b) => $\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=1 \end{cases}$ => 2b = p – 1

      => b = $\frac{p-1}{2} \in \mathbb{N}$ => n = $(\frac{p-1}{2})^2$

   b) Dacă p = 2 =>) $\sqrt{n(n+p} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow$ n(n+2) pătrat perfect.

   $n^2 < n^2 + 2n < (n+1)^2$ contradicție => p ≠2 => p impar =>

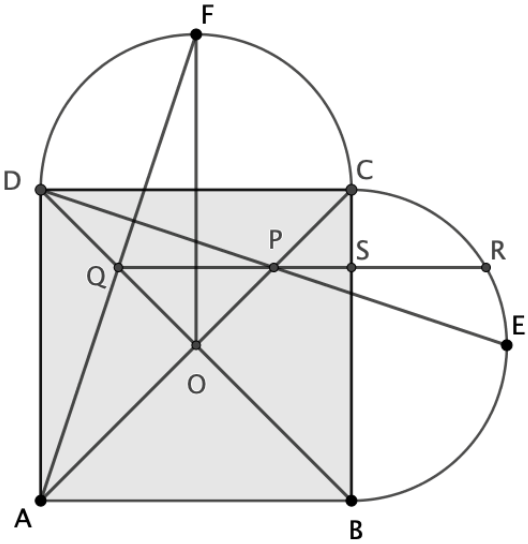
   n = $(\frac{p-1}{2})^2$. Dacă presupunem prin absurd că $\sqrt{n+m} \in \mathbb{Q}$ =>

   n + m pătrat perfect => $(\frac{p-1}{2})^2$ + m pătrat perfect. Dar 0 < m < p

   $(\frac{p-1}{2})^2 < (\frac{p-1}{2})^2 + m < (\frac{p-1}{2})^2 + p = \frac{p^2-2p+1+4p}{4} = (\frac{p+1}{2})^2$ și

   $(\frac{p-1}{2})^2$, $(\frac{p+1}{2})^2$ pătrate perfecte consecutive => contradicție .

   Deci $\sqrt{n+m} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.



2. a) ΔEBC și ΔFCD sunt dreptunghice isoscele => $\widehat{ECB} \equiv \widehat{DCF} = 45^0$ =>

$\widehat{ECF} = 45^0 + 90^0 + 45^0 = 180^0$ =>

Punctele E, C, F coliniare.

$\hat{E} \equiv \hat{F} = 90^0$ => BE ∥ DF, BE ≡ DF => BEFD dreptunghi CE ∥ DO,

CE ≡ DO => CEOD paralelogram CO, DE diagonale => P mijlocul lui DE.

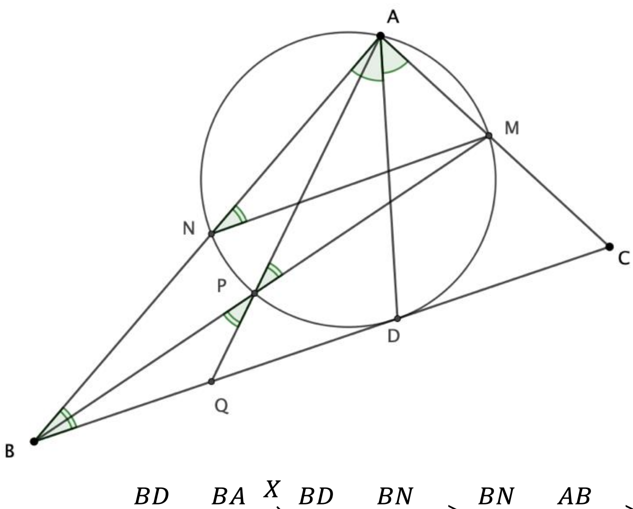
AO ∥ DF, AO ≡ DF => AOFD paralelogram, DO, AF diagonale =>

Q mijlocul lui AF.

b) P, Q mijloc lui CO, respectiv DO => QP linie mijlocie în ΔOCD. Notăm $QR \cap BC = \{S\}$ => $SC = \frac{e}{4}$, $BS = \frac{3e}{4}$, unde BC = e.

ΔRBC dreptunghic $RS^2 = CS \cdot BC = \frac{e^2}{4}$ => $RS = \frac{l}{2}$ $RS = \frac{BC}{2}$ =>

$\widehat{RBC} = 30^0$ => $\widehat{RBQ} = 30^0 + 45^0 = 75^0$, $\widehat{BQR} = 45^0$, $\widehat{BRQ} = 60^0$.



3. Notăm cu N al doilea punct de intersecție al cercului Π cu dreapta AB.

Din puterea punctului B și C față de cercul Π => $BN \cdot BA = BD^2$ și

$CM \cdot CA = CD^2$ => $\left(\frac{BD}{CD}\right)^2 = \frac{BN \cdot BA}{CM \cdot CA}$ (x).

Din teorema bisectoarei =>

$\frac{BD}{CD} = \frac{BA}{CA} \overset{X}{\Rightarrow} \frac{BD}{CD} = \frac{BN}{CM}$ => $\frac{BN}{CM} = \frac{AB}{AC}$ => $\frac{BN}{AB} = \frac{CM}{AC} \xrightarrow{R.T.Th}$ MN ∥ BC =>

∢ANM ≡ ∢B (∢ corespondente)

Dar ∢ANM ≡ ∢APM (ANPM înscris în cerc) și ∢BPQ ≡ ∢APM

=> ∡ANM ≡ ∡BPQ, ∡Q ≡ ∡Q => Δ BQP ~ Δ AQB (U.U) =>

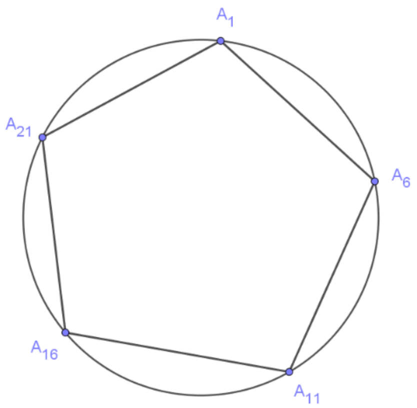
$\frac{BQ}{AQ} = \frac{PQ}{BQ}$ => $BQ^2 = AQ \cdot PQ$. Dar din puterea punctului Q față de cerc =>

$QP \cdot QA = QD^2$ => BQ = QD.

4. a) $A_i\widehat{OA_{i+1}} = \frac{360^0}{25}$, Presupunem că Δ $A_iA_jA_k$ echilateral =>

∡ $A_iOA_j = 120^0$ => p : $\frac{360^0}{25} = 120^0$ => p = $\frac{25}{3} \in \mathbb{N}$

=> nu există Δ echilaterale.



b) $A_1A_6A_{11}A_{16}A_{21}$ este un pentagon regulat. În orice pentagon regulat oricum am alege 3 vârfuri acestea sunt vârfurile unui Δ isoscel.

Orice segment unit de 2 vârfuri sunt capetele unui arc de lungime

$l_{A_1A_6}$ sau $2 \cdot l_{A_1A_6}$. Cum sunt 3 laturi și două posibilități rezultă că două laturi vor fi egale, adică Δ isoscel.

c) a + b + c = 25, a, b, c de aceeași paritate => impare.

Putem presupune a > b > c. Dacă a < 11 => a ≤ 9, b ≤ 7, c ≤ 5 =>

a+b+c ≤ 21 contradicție.

=> a ≥ 11. Vom arăta că există un triunghi cu vârfurile de culoarea a. Considerăm pentagoanele regulate $A_i\, A_{i+5}\, A_{i+10}\, A_{i+15}\, A_{i+20}$,

i ∈ {1, 2, 3, 4, 5}.

Cumm avem 11 puncte cel puțin de culoare a și 5 pentagoane => 3 puncte vor fi vârfurile aceluiași pentagon, adică sunt vârfurile unui Δ isoscel.