MATE 97 – TURNEUL OLIMPICILOR

Soluții clasa a 8-a

1. a) Adunând a, b respectiv c la cele trei ecuații vom obține

$$a^2 + a(n+1) = b^2 + b(n+1) = c^2 + c(n+1) \mid + \frac{(n+1)^2}{4}$$

$$\Rightarrow \left(a + \frac{n+1}{2}\right)^2 = \left(b + \frac{n+1}{2}\right)^2 = \left(c + \frac{n+1}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \left(a + \frac{n+1}{2} + b + \frac{n+1}{2}\right)(a-b) = 0 \\ \left(a + \frac{n+1}{2} + c + \frac{n+1}{2}\right)(a-c) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b \ sau \ a + b = n+1 \\ a = c \ sau \ a + c = n+1 \end{cases}$$

i. Dacă $a = b = c \Rightarrow a^2 + a(n-2) = 0 \Rightarrow a = 0$ sau $a = 2 - n$ adică toate soluțiile sunt întregi.

ii. $a = b,\ a + c = -(n+1) \Rightarrow a^2 + an = -(n+1) \Rightarrow a^2 + an + n + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Delta = n^2 - 4n - 4$.

Dacă $\Delta < 0$ ec nu are soluții reale.

Dacă $\Delta \geq 0$, $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow \Delta$ pătrat perfect.

$\Delta = n^2 - 4n + 4 - 8 = (n-2)^2 - 8 \geq 0 \Leftrightarrow (n-2)^2 \geq 8 \Leftrightarrow n \geq 5$.

Încadrăm Δ între 2 pătrate perfecte consecutive pentru $n \geq 5$.

$n^2 - 6n + 9 < n^2 - 4n - 4 < n^2 - 4n + 4 = (n-2)^2 \Leftrightarrow 13 < 2n \Leftrightarrow n \geq 7$

Deci pentru $n \geq 7$ $(n-3)^2 < \Delta < (n-2)^2 \Rightarrow$ Δ nu este pătrat perfect

$\Rightarrow$ ecația are soluții în $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

Pentru $n = 5 \Rightarrow a^2 + 5a + 6 = 0 \Rightarrow a \in \{-2, -3\}$;

$a + c = -6 \quad a = -2 \Rightarrow c = -4,\ a = -3 \Rightarrow c = -3$

Pentru $n = 6 \Rightarrow a^2 + 6a + 7 = 0 \Rightarrow \Delta = 36 - 28 = 8 \neq$ pătrat perfect $\Rightarrow$

$\Rightarrow a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

Deci sistemul are toate soluțiile întregi $\Leftrightarrow n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Pentru $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow S = \{(0, 0, 0), (2-n, 2-n, 2-n)\}$

$$n = 5 \Rightarrow S = \{(0, 0, 0), (-3, -3, -3), (-2, -2, -4), (-2, -4, -2), (-4, -2, -2)\}.$$

2. a) $S = 10n + 55 = 5(2n + 11)$ = pătrat perfect $\Leftrightarrow 2n + 11 = 5k^2 \Leftrightarrow$

$n = \frac{5k^2-11}{2} \Rightarrow k = 2p + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = \frac{5(4p^2+4p+1)-11}{2} = \frac{20p^2+20p-6}{2} = \frac{2(10p^2+10p-3)}{2} \Rightarrow n = 10p^2 + 10p - 3$, $p \geq 1$. Cel mai mic n este pentru $p = 1 \Rightarrow n = 17$

b) Fie $d = (n + i, n + j)$, $i > j$; $i, j \in \{1, 2, ..., 10\} \Rightarrow d | i - j \Rightarrow 0 < d \leq 9$.

În mulțimea M_n sunt două numere divizibile cu 5 și maxim două numere. divizibile cu 7.

Astfel rămân 6 numere în M_n care nu sunt divizibile nici cu 5 nici cu 7 și atunci oricum am lua două dintre ele, cel mai mare divizor prim al lor poate fi 2 sau 3. Dacă prin absurd presupunem că produsul elementelor mulțimii M_n este pătrat perfect, cele 6 numere vor avea una din formele x^2, $2x^2$, $3x^2$ sau $6x^2$.

Din principiul cutiei $\Rightarrow \exists\, i, j \in \{1, 2, ..., 10\}$, $i > j$ astfel încât $n + i = kx^2$ și $n + j = ky^2$, unde $k \in \{1, 2, 3, 6\}$

$\Rightarrow i - j = k(x^2 - y^2) == k(x - y)(x + y)$.

$\Rightarrow 1 \leq k(x - y)(x + y) \leq 9$, $x > y$.

$k = 1 \Rightarrow (x, y) \in \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4)\}$

$\Rightarrow$ valoarea maximă a lui $n + i = kx^2$ este $25 \Rightarrow n + 10 \leq 33$

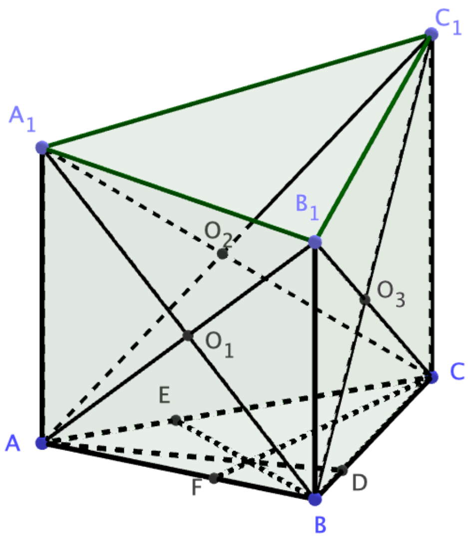
$k = 2 \Rightarrow (x, y) \in \{(2, 1)\} \Rightarrow n + i = kx^2 = 8 \Rightarrow n + 10 \leq 16$

$k = 3 \Rightarrow (x, y) \in \{(2, 1)\} \Rightarrow n + i = kx^2 = 12 \Rightarrow n + 10 \leq 20$

$k = 6 \Rightarrow (x, y) \in \emptyset$.

Dacă $M_n \subset \{2, 3, ..., 21\}$ avem pe 11 număr prim și produsul $\vdots$ 11 dar nu e divizibil cu 11^2. Dacă $M_n \subset \{22, 23, ..., 33\}$avem p prim, p 23 și 31 produsul $\vdots$ p nu e divizbil cu $p^2 \Rightarrow$ nu este pătrat perfect.

3. a) Lemă. Fie α, β, γ trei plane astfel încât dacă $\alpha \cap \beta = d_3$, $\alpha \cap \gamma = d_1$ și dreptele d_1, d_2, d_3 sunt două câte două concurente atunci intersecția planelor α, β, γ reprezintă un punct.



Notăm O_1, O_2, O_3 intersecțiile diagonalelor trapezelor ABB_1A_1, ACC_1A_1 respective BCC_1B_1.

Avem: $(A_1BC) \cap (B_1AC) = CO_1$,

$(A_1BC) \cap (C_1AB) = BO_2$, $(B_1AC) \cap (C_1AB) = AO_3$ sunt concurente două câte două și se aplică lema.

Analog se aplică lema în cazul

$(AB_1C_1) \cap (BA_1C_1) = O_1C_1$, $(AB_1C_1) \cap (CA_1B_1) = B_1O_2$,

$(BA_1C_1) \cap (CA_1B_1) = A_1O_3$ și

A_1O_3, B_1O_2, O_1C_1 concurente două câte două.

b) $\sphericalangle((A_1BC), (ABC)) = \sphericalangle A_1DA = 45^0$ și analog

$\sphericalangle((B_1AC), (ABC)) = \sphericalangle B_1EB = 45^0$

$\sphericalangle((C_1AB), (ABC)) = \sphericalangle C_1FC = 45^0$

Fie O proiecția lui M pe planul (ABC) și ducem $OD' \perp BC$, $D' \in BC$

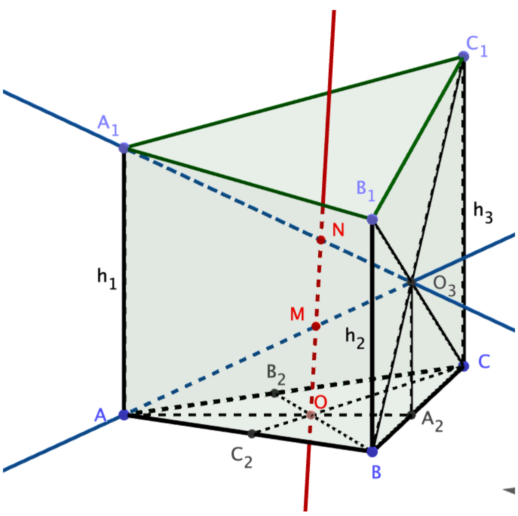
$\Rightarrow \sphericalangle MD'O = \sphericalangle((A_1BC), (ABC)) = 45^0 \Rightarrow MO \equiv OD'$. Analog

$MO \equiv OE'$, $MO \equiv OF'$ $OE' \perp AC$, $E' \in (AC)$, $OF' \perp (AB)$,

$F' \in (AB)$, $OD' = OE' = OF' = MO \Rightarrow$

$d(O, AB) = d(O, AC) = d(O, BC) \Rightarrow$ O este centrul cercului înscris

în $\Delta ABC \Rightarrow MO = OD' = r$.



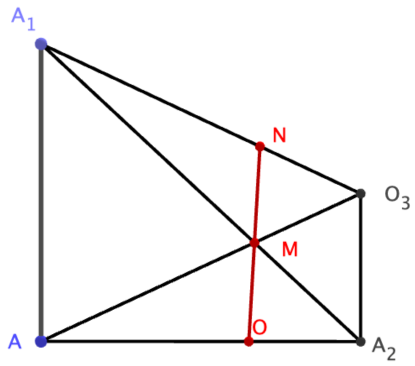
c) Ducem $O_3A_2 \perp BC \xRightarrow{O_1C_2 \parallel AB, O_2B_2 \perp AC} O_3A_2 \perp (ABC)$

Deoarece $M \in AO_3 \Rightarrow MO \perp (ABC) \Rightarrow O \in AA_2$.

Punctul $N \in A_1O_3$.

Ducem $NO' \perp (ABC)$, $(AA_2O_3A_1) \perp (ABC) \Rightarrow$

$\Rightarrow O' \in AA_2$.



Analog O'∈ BB_2, CC_2 => O'∈ $AA_2 \cap BB_2 \cap CC_2 = \{O\}$

=> O' ≡ O => O, N, M coliniare.

=> $O_3A = \frac{h_2 \cdot h_3}{h_2+h_3} \xRightarrow{T.bis} \frac{AO}{OA_2} = \frac{AB+AC}{BC} = \frac{b+c}{a}$, iar în

trapezul $AA_2O_3A_1$,

$$NO = \frac{AA_1 + \frac{AO}{OA_2} \cdot A_2O_3}{1 + \frac{AO}{OA_2}} = \frac{AA_1 + \frac{b+c}{a} \cdot A_2O_3}{1 + \frac{b+c}{a}} = = \frac{aAA_1 + (b+c)\, A_2O_3}{a+b+c} =$$

$$= \frac{ah_1 + (b+c)\frac{h_2 \cdot h_3}{h_2+h_3}}{a+b+c} = \frac{ah_1(h_2+h_3) + (b+c) \cdot h_2 \cdot h_3}{(a+b+c)(h_2+h_3)} = \frac{2S(h_2+h_3) + 2S \cdot h_3 + 2S \cdot h_2}{(a+b+c)(h_2+h_3)} =$$

$$= \frac{4S}{a+b+c} = 2r.$$

4. Lemă. Dacă putem umple cubul cu n cuburi putem umple și cu $n + m^3 - 1$cuburi, $m \geq 2$.

   Dem. Alegem un cub din cele n și îl împărțim în m^3 cuburi:

   $12^3 = 1728$ împărțim cubul în 1728 cuburi.

   $2023 - 1728 = 295$

   $295 - 2(125 - 1) = 295 - 248 = 47$

   $47 - (27 - 1) = 21 = 3 \cdot 7 = 3 \cdot (2^3 - 1)$

   $2023 = 1728 + 2 \cdot (5^3 - 1) + (3^3 - 1) + 3 \cdot (2^3 - 1)$.