Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală, București, 10 februarie 2024

CLASA a VII-a - Soluții și barem

Problema 1 Arătați că:

a) Arătați că $\dfrac{3\sqrt{20}-\sqrt{18}}{3\sqrt{8}}-\dfrac{\sqrt{45}-2\sqrt{3}}{2\sqrt{12}}=\dfrac{2\sqrt{50}-\sqrt{75}}{2\sqrt{20}}$;

b) Determinați $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\dfrac{1}{n-2} \geq \dfrac{4-\sqrt{2}}{7}$.

Soluție:

a) $\dfrac{3\sqrt{20}-\sqrt{18}}{3\sqrt{8}}-\dfrac{\sqrt{45}-2\sqrt{3}}{2\sqrt{12}}=\dfrac{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}-\dfrac{3\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}=\dfrac{6\sqrt{10}-6-3\sqrt{15}+6}{12}=$
$\dfrac{6\sqrt{10}-3\sqrt{15}}{12}=\dfrac{2\sqrt{10}-\sqrt{15}}{4}$ **2p**

$\dfrac{2\sqrt{50}-\sqrt{75}}{2\sqrt{20}}=\dfrac{10\sqrt{2}-5\sqrt{3}}{4\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{10}-\sqrt{15}}{4}$ **1p**

b) Dacă $n \leq 1 \Rightarrow \dfrac{1}{n-2}<0<\dfrac{4-\sqrt{2}}{7}$ **1p**

Pentru $n > 2 \Rightarrow \dfrac{1}{n-2} \geq \dfrac{4-\sqrt{2}}{7} \Leftrightarrow \dfrac{7}{4-\sqrt{2}} \geq n-2 \Leftrightarrow \dfrac{4+\sqrt{2}}{2} \geq n-2 \Leftrightarrow$
$4+\dfrac{\sqrt{2}}{2} \geq n$ **2p**

Obținem $n<5 \Rightarrow n \in \{3,4\}$ **1p**

Observație: În cazul unei rezolvări prin aproximarea lui $\sqrt{2}$ se scade un punct pentru folosirea unei aproximări prin adaos (de exemplu $\sqrt{2} \approx 1,5$).

Problema 2 Fie numerele reale $a_n = 1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\sqrt{n}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătați că $a_{2024}<0$;

b) Demonstrați că $a_n \cdot a_{n+1}<0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;

c) Comparați numerele $x = 2\cdot(|a_1|+|a_2|+|a_3|+\ldots+|a_{2024}|)$ și $y=|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+|a_3-a_4|+\ldots+|a_{2023}-a_{2024}|+|a_{2024}-a_1|$.

Soluție:

a) Grupăm cei 2024 termeni 2 câte 2. Cum $\sqrt{n} - \sqrt{n+1} < 0 \Rightarrow$ fiecare grupă este număr negativ $\Rightarrow a_{2024} < 0$ **2p**

b) Grupând termenii 2 câte 2, observăm că fiecare $a_{2k} < 0$. Pe de altă parte, pentru n impar, putem grupa termenii 2 câte 2 începând cu cel de-al doilea termen, fiecare grupă fiind un număr pozitiv $\Rightarrow a_{2k+1} > 0$ **1p**

   Cum n și $n+1$ sunt numere consecutive, unul va fi par, iar celălalt impar, deci unul dintre numerele a_n sau a_{n+1} va fi negativ, iar celălalt pozitiv $\Rightarrow a_n \cdot a_{n+1} < 0$... **1p**

c) $x = 2 \cdot (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2023} - a_{2024}) = 2 \cdot (a_1 + a_3 + \ldots a_{2023}) - 2 \cdot (a_2 + a_4 + \ldots + a_{2024})$ **1p**

   $y = a_1 - a_2 + a_3 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_4 + \ldots a_{2023} - a_{2024} + a_1 - a_{2024} = 2 \cdot (a_1 + a_3 + \ldots a_{2023}) - 2 \cdot (a_2 + a_4 + \ldots + a_{2024})$ **1p**

   Deci $x = y$ **1p**

Problema 3 Fie $ABCD$ un pătrat și M un punct pe latura BC. De aceeași parte a dreptei AB se construiește pătratul $AMNP$. Arătați că punctele P, D și C sunt coliniare, iar $AC \perp CN$.

autor: Adrian Bud, supliment Gazeta Matematică

Soluție: $\angle BAD = \angle MAP = 90° \Rightarrow \angle BAM = \angle DAP$ **1p**
Obținem $\triangle ABM \equiv \triangle ADP(L.U.L.) \Rightarrow \angle ABM = \angle ADP = 90°$ **1p**
Iar $\angle PDC = \angle ADP + \angle ADC = 180° \Rightarrow P, D, C$ coliniare **1p**
AN diagonală în pătratul $AMNP \Rightarrow \angle ANM = 45°$ **1p**
Analog, AC diagonală în pătratul $ABCD \Rightarrow \angle ACM = 45°$ **1p**
Cum $\angle ANM = \angle ACM \Rightarrow$ patrulaterul $AMCN$ inscriptibil **1p**
Deci $\angle ACN = \angle AMN = 90° \Rightarrow AC \perp CN$ **1p**

Problema 4 Fie $ABCD$ un paralelogram cu $AC \cap BD = \{O\}$ și E un punct în exteriorul paralelogramului astfel încât D este centrul de greutate al triunghiului $\triangle AOE$. Demonstrați că:

a) $ODEF$ este paralelogram, unde $AD \cap CE = \{F\}$;

b) Aflați raportul dintre aria $\triangle ABE$ și aria paralelogramului $ABCD$.

autor: Traian Preda

Soluție:

a) Fie $\{M\} = AD \cap OE$ și $\{N\} = AE \cap OD$. Cum D este centru de greutate în $\triangle AOE \Rightarrow EM = MO, AN = NE$.
Dar $AO = OC \Rightarrow ON$ linie mijlocie în $\triangle ACE \Rightarrow ON \parallel CE$ **1p**

$OD \parallel CE \Rightarrow \angle MOD = \angle MEF \Rightarrow \triangle MOD \equiv \triangle MEF (U.L.U.)$ **1p**

Obținem $MD = MF$ și cum $EM = MO \Rightarrow ODEF$ paralelogram **1p**

b) $ABCD$ paralelogram $\Rightarrow A_{\triangle AOB} = A_{\triangle AOD} = S \Rightarrow A_{ABCD} = 4S$ **1p**

D centru de greutate în $\triangle AOE \Rightarrow A_{\triangle AOD} = A_{\triangle ADE} = A_{\triangle EOD} = \dfrac{A_{\triangle AOE}}{3} = S$. **1p**

Cum EO este mediană în $\triangle EBD \Rightarrow A_{\triangle EOB} = A_{\triangle EOD} = S \Rightarrow A_{\triangle ABE} = A_{\triangle AOE} + A_{\triangle BOE} + A_{\triangle AOB} = 5S$ **1p**

Obținem $\dfrac{A_{\triangle ABE}}{A_{ABCD}} = \dfrac{5}{4}$ **1p**