Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală, București, 10 februarie 2024

CLASA a VIII-a - Soluții și barem

Problema 1 Determinați numerele întregi x și y care verifică relația $x(x+3)(x+6)(x+9)+64=y^2$.

autori: Voichița Tarciniu și Vasile Tarciniu, supliment Gazeta Matematică

Soluție: Notând $x^2+9x=a$, obținem $x(x+3)(x+6)(x+9)=(x^2+9x)(x^2+9x+18)=a(a+18)=a^2+18a$ **1p**

Atunci $a^2+18a+64=y^2 \Leftrightarrow (a+9)^2-y^2=17 \Leftrightarrow (a+9-y)(a+9+y)=17$ ... **2p**

Analizând cazurile: *i)* $a+9-y=1; a+9+y=17$; *ii)* $a+9-y=-1; a+9+y=-17$; *iii)* $a+9-y=17; a+9+y=1$; *iv)* $a+9-y=-17; a+9+y=-1$ obținem $(a,y)\in\{(0,8),(-18,-8),(0,-8),(-18,8)\}$ **2p**

$x^2+9x=0 \Rightarrow x\in\{0;-9\}$, iar $x^2+9x=-18 \Leftrightarrow (x+3)(x+6)=0 \Rightarrow x\in\{-3;-6\} \Rightarrow (x,y)\in\{(0,8);(0,-8);(-9,8);(-9,-8);(-3,8);(-3,-8);(-6,8);(-6,-8)\}$ **2p**

Observație: Pentru enumerarea directă a celor 8 soluții se acordă **2 puncte.**

Problema 2

a) Arătați că $\sqrt{1+a}<1+\frac{a}{2}$ pentru orice $a\in(0;+\infty)$;

b) Calculați partea întreagă a numărului $N=\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{5}{4}}+\sqrt{\frac{7}{6}}+\sqrt{\frac{13}{12}}$.

Soluție

a) Ridicând la pătrat, obținem $1+a<\left(\frac{2+a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 1+a<\frac{4+4a+a^2}{4} \Leftrightarrow$
$4+4a<4+4a+a^2 \Leftrightarrow 0<a^2$ **3p**

b) Fiecare radical este mai mare ca 1, deci $N>5$ **1p**

Aplicând *a*), obținem $\sqrt{1+1}<1+\frac{1}{2}$ și analoagele **1p**

Deci $N<1+\frac{1}{2}+1+\frac{1}{4}+1+\frac{1}{8}+1+\frac{1}{12}+1+\frac{1}{24} \Rightarrow 5<N<6 \Rightarrow [N]=5$ ... **2p**

Observație: În cazul demonstrației inegalității $N<6$ folosind aproximări ale radicalilor, se scade câte **1 punct** pentru fiecare două aproximări luate prin lipsă și nu prin adaos.

Problema 3 În prisma triunghiulară dreaptă $ABCA'B'C'$, fie O centrul feței $BCC'B'$, iar $A'O\cap(ABC)=\{D\}$.

a) Arătați că patrulaterul $ABDC$ este paralelogram;

b) Dacă $M \in (CC')$ astfel încât $MC = 2MC'$ și $\{E\} = MO \cap (ABC)$, aflați raportul dintre ariile triunghiurilor $\triangle BCD$ și $\triangle ADE$.

autor: Bogdan Georgescu

Soluție

a) Aplicând teorema umbrei pentru $(A'BC') \cap (ABC) = BD$, cu $A'C' \parallel (ABC)$, obținem $A'C' \parallel BD$ **1p**

$\triangle A'OC' \equiv \triangle DOB(U.L.U.) \Rightarrow A'C' = BD$. Dar $AC = A'C' = BD, AC \parallel A'C' \parallel BD \Rightarrow ABDC$ paralelogram **2p**

b) $(BCC') \cap (ABC) = BC \Rightarrow E \in BC$. Folosind teorema lui Menelaus în triunghiul BCC', cu transversala $M - O - E$, obținem $\dfrac{BE}{EC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow BE = BC$ **2p**

Notăm cu $\{P\} = AD \cap BC \Rightarrow BP = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{BE}{2} \Rightarrow A_{\triangle ABE} = 2 \cdot A_{\triangle ABP} = 2a$, iar EP mediană în triunghiul $ADE \Rightarrow A_{\triangle ADE} = 2 \cdot A_{\triangle AEP} = 6a$ **1p**

Iar $A_{\triangle BCD} = A_{\triangle ABC} = 2 \cdot A_{\triangle ABP} = 2a \Rightarrow \dfrac{A_{\triangle BCD}}{A_{\triangle ADE}} = \dfrac{2a}{6a} = \dfrac{1}{3}$ **1p**

Observație: Relația $BE = BC$ se poate demonstra și folosind asemănare sau reciproca teoremei liniei mijlocii în triunghiul EMC. Punctul B este centrul de greutate al triunghiului ADE, de unde obținem $A_{\triangle ADE} = 3 \cdot A_{\triangle ABD}$.

Problema 4 Fie $ABCD$ un tetraedru, G centrul de greutate al $\triangle ACD$, H ortocentrul $\triangle ABD$, și I centrul cercului înscris în $\triangle ABC$. Știind că $BG \perp (ACD), CH \perp (ABD)$ și $DI \perp (ABC)$, demonstrați că $ABCD$ este tetraedru regulat.

autor: Traian Preda

Soluție: Fie $AH \cap BD = \{A'\}, BH \cap AD = \{B'\}, DH \cap AB = \{D'\} \Rightarrow AA', BB', DD'$ înălțimile $\triangle ABD$. Dar $CH \perp (ABD) \Rightarrow CH \perp BD$ și cum $AA' \perp BD$, obținem $BD \perp (AA'C) \Rightarrow BD \perp AC$ **1p**

Analog, $AB \perp (CDD') \Rightarrow AB \perp CD$. Construim $AT \perp A'C, T \in A'C$. Cum $BD \perp (AA'C) \Rightarrow BD \perp AT \Rightarrow AT \perp (BCD)$ **1p**

$AT \perp (BCD) \Rightarrow AT \perp CD$, dar $CD \perp AB \Rightarrow CD \perp (ABT) \Rightarrow CD \perp BT$. Cum $BD \perp (AA'C) \Rightarrow BD \perp A'C \Rightarrow T$ ortocentrul $\triangle BCD$ **1p**

Deci perpendiculara din A pe planul (BCD) cade în ortocentrul triunghiului BCD. Analog demonstrăm că G este ortocentrul $\triangle ACD$ și I este ortocentrul $\triangle ABC \Rightarrow \triangle ACD$ și $\triangle ABC$ sunt echilaterale **2p**

Din $\triangle ABC$ echilateral $\Rightarrow D'$ mijlocul $[AB] \Rightarrow \triangle ABD$ isoscel de bază $[AB] \Rightarrow AD = DB$. Dar $AC = CD = AD = AB = AC$, deci toate cele 6 muchii ale tetraedrului sunt congruente $\Rightarrow ABCD$ tetraedru regulat **2p**