Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2024

CLASA a VII-a – soluții și bareme

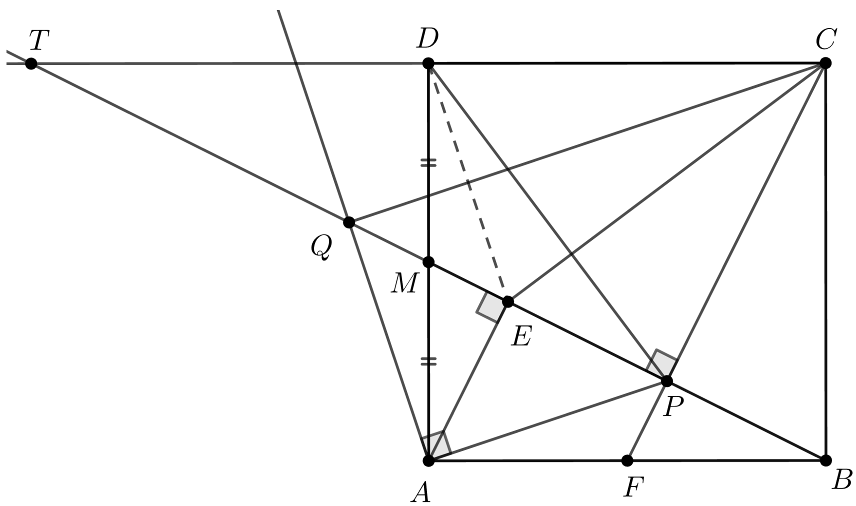
Problema 1. Fie $ABCD$ un pătrat, M mijlocul laturii AD, T intersecția dreptelor BM și CD, iar $CP \perp BM$, $P \in MB$. Perpendiculara dusă prin punctul A pe dreapta AP intersectează dreapta BM în punctul Q. Arătați că:

a) $\sphericalangle APQ = \sphericalangle PCQ = 45°$.

b) $PQ = QT = PC$.

Gazeta Matematică

Soluție. a) Notăm intersecția dreptelor CP și AB cu F și piciorul perpendicularei din A pe BM cu E.



Cum $CB = BA$ și $\sphericalangle FCB = \sphericalangle MBA = 90° - \sphericalangle CBM$, triunghiurile dreptunghice CBF și BAM sunt congruente, de unde rezultă $FB = MA = \dfrac{AB}{2}$, deci F este mijlocul laturii AB **1p**

Se deduce că FP este linie mijlocie în triunghiul AEB, deci $BP = EP$ și din congruența triunghiurilor CPB și BEA, rezultă $PB = AE$ și $CP = BE$ **1p**

Triunghiul EAP este dreptunghic isoscel, deci $\sphericalangle APE = 45°$, așadar și triunghiul APQ este dreptunghic isoscel. În concluzie înălțimea AE este și mediană **1p**

Se obține $QP = 2EP = EB = PC$, astfel că triunghiul PCQ este de asemenea dreptunghic isoscel, de unde $\sphericalangle PCQ = 45°$ și $CQ \parallel AP$ **1p**

b) Cum $CD = CB$, $\sphericalangle DCP = \sphericalangle CBE$ și $PC = EB$, triunghiurile DPC și CEB sunt congruente, de unde rezultă $DP = CE = CB = DA$ **1p**

Din congruența triunghiurilor DEA și DEP (LLL) rezultă $\sphericalangle ADE = \sphericalangle PDE$, deci DE este dreapta suport a bisectoarei și înălțimii în triunghiul isoscel DAP **1p**

Deoarece $DE \perp QC$, rezultă că CQ este mediatoarea laturii DE în triunghiul isoscel CDE, astfel că $QD = QE = \dfrac{QP}{2} = \dfrac{PC}{2}$. Atunci DQ este linie mijlocie în triunghiul TPC, iar $TQ = QP = 2EP = EB = CP$. **1p**

Problema 2. Se consideră două mulțimi A și B de numere reale care au proprietățile:
(a) $0 \in A$;
(b) Dacă $1 + x \in A$, atunci $\sqrt{1 + x + x^2} \in B$;
(c) Dacă $\sqrt{x^2 - x + 1} \in B$, atunci $2 + x \in A$.
Arătați că $\sqrt{3}, \sqrt{13}, \sqrt{31}$ sunt elemente ale mulțimii B și $2024 \in A$.

Soluție. Deoarece $1+(-1) = 0 \in A$, conform (b) obținem $1 \in B$ și cum $1 = \sqrt{0^2 - 0 + 1} \in B$, deducem din (c) $2 \in A$, de unde $\sqrt{3} \in B$ **2p**

Cum $\sqrt{2^2 - 2 + 1} = \sqrt{3} \in B$, rezultă din (c) $2+2 = 4 \in A$ și, din (b), deducem $\sqrt{13} \in B$ **1p**

Deoarece $\sqrt{4^2 - 4 + 1} = \sqrt{13} \in B$, deducem în continuare că $2 + 4 = 6 \in A$ și astfel $\sqrt{1 + 5 + 5^2} = \sqrt{31} \in B$ **1p**

Folosind egalitatea $1 + x + x^2 = (x + 1)^2 - (x + 1) + 1$, avem că, dacă $(1 + x) \in A$, atunci $3 + x \in A$. Deoarece $0 \in A, 2 \in A$ deducem astfel că mulțimea A conține toate numerele pare, așadar avem și $2024 \in A$ **3p**

Problema 3. Un număr natural $n \geqslant 2$ se numește *special* dacă există n numere naturale impare a căror sumă este egală cu produsul lor.

a) Arătați că 5 este un număr special.

b) Determinați câte numere speciale conține mulțimea $\{2, 3, \ldots, 2024\}$.

Soluție. a) Deoarece $1 + 1 + 1 + 3 + 3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3$, există 5 numere impare a căror sumă este egală cu produsul lor, deci 5 este special **2p**

b) Dacă n este un număr special, atunci există numerele impare $a_1, a_2, \ldots, a_n$ astfel încât $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1 a_2 \ldots a_n$. Presupunem că, dintre acestea, k sunt de forma $M_4 + 3$ și restul, $n - k$, sunt de forma $M_4 + 1$.

Atunci $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = M_4 + 3 \cdot k + 1 \cdot (n - k) = M_4 + 2k + n$, (1) **1p**

Deoarece produsul a două numere impare are forma $M_4 + 1$ dacă numerele dau același rest la împărțirea cu 4 și forma $M_4 + 3$ în caz contrar, deducem că produsul $a_1 a_2 \ldots a_n$ are forma $M_4 + 1$ atunci când k este par, respectiv forma $M_4 + 3$ atunci când k este impar, (2) **1p**

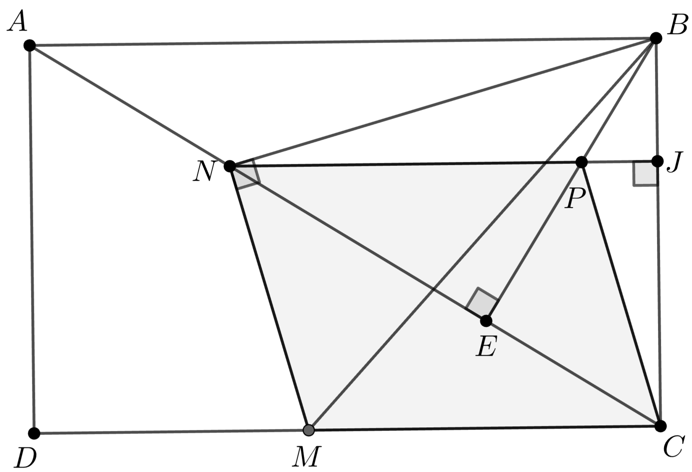
Cum $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1 a_2 \ldots a_n$, din (1) și (2) deducem că $n = M_4 + 1$ **1p**

Dacă $n = 4t + 1$, $t \in \mathbb{N}^*$, pentru $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-2} = 1$, $a_{n-1} = 3$ și $a_n = 2t + 1$ avem $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1 a_2 \ldots a_n = 6t + 3$, deci orice număr de forma $M_4 + 1$ este special. Mulțimea $\{2, 3, \ldots, 2024\}$ conține 505 numere de forma $M_4 + 1$, deci conține 505 numere speciale ... **2p**

Problema 4. Se consideră un paralelogram $ABCD$ și punctele M pe latura DC, E și N pe diagonala AC, astfel încât $BE \perp AC$ și $\dfrac{CM}{CD} = \dfrac{EN}{EA}$.

Arătați că, dacă MN și NB sunt perpendiculare, atunci $ABCD$ este dreptunghi.

Soluție. Construim paralela prin N la dreapta AB și notăm cu P intersecția acesteia cu dreapta BE.



Aplicând teorema fundamentală a asemănării în triunghiul EAB obținem $\dfrac{NP}{AB} = \dfrac{EN}{EA} = \dfrac{CM}{CD}$ **2p**

Obținem, de aici, că $NP = CM$ și cum $NP \parallel MC$, rezultă că $MNPC$ este paralelogram, deci $MN \parallel CP$ **1p**

Din ipoteză avem $MN \perp NB$, așadar $CP \perp NB$ **1p**

În triunghiul BNC, BE și CP sunt drepte suport pentru înălțimi, deci punctul P este ortocentru. **2p**

Rezultă că $NP \perp BC$ și cum $NP \parallel CD$ rezultă $BC \perp CD$, deci $ABCD$ dreptunghi **1p**