Scoala Gimnaziala nr. 97
Bucuresti, sector 4

MATE

Concurs

Turneul Olimpicilor

Clasa a VII-a

23 Mai 2015

1) Să se determine numerele întregi x,y,z care îndeplinesc simultan condiţiile:
$x + y + z = 2015$ şi $x^2 + 2y^2 + z^2 = 2(xy + yz + 1)$.

2) Un număr natural n se numeşte q- productiv dacă există numerele naturale nenule (nu neapărat distincte) k, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ astfel încât $n = \frac{2x_1+1}{x_1+1} \cdot \frac{2x_2+1}{x_2+1} \cdot \frac{2x_3+1}{x_3+1} \cdot \ldots \cdot \frac{2x_k+1}{x_k+1}$.

Demonstraţi că: a) 6 nu este q- productiv .

b) 5 şi 13 sunt q- productive.

c) 2015 este q- productiv .

3) Se consideră triunghiul isocel ABC de bază BC şi punctele $D \in (AB)$, $E \in (AC)$, $F \in (AC \setminus (AC)$ astfel încât $BD \equiv AE \equiv CF$. Notăm $DF \cap BC = \{T\}$. Demonstraţi că $ET \perp BC$.

4) Pe laturile triunghiului ascuţitunghic ABC se construiesc în exterior triunghiurile isoscele DBC, ECA, FAB astfel încât $\angle DBC \equiv \angle DCB \equiv \angle EAC \equiv \angle ECA \equiv \angle FAB \equiv \angle FBA \equiv \angle BAC$.
Fie M mijlocul laturii BC şi $DE \cap AC = \{P\}$, $DF \cap AB = \{Q\}$. Demonstraţi că : $\frac{MP}{MQ} = \frac{AB}{AC}$.

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare problemă se punctează corespunzator de la 0 la 7 puncte.