Scoala Gimnaziala nr. 97
Bucuresti, sector 4

Concurs MATE
Turneul Olimpicilor

Clasa a VII-a
13 Mai 2023

1. a) Fie p un număr prim impar. Arătați că există un singur număr natural nenul n, cu propietatea că $\sqrt{n(n+p)}$ este un număr rațional.

   b) Demonstrați că dacă p este un număr prim și n este un număr natural nenul astfel încât $\sqrt{n(n+p)} \in \mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{n+m} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ pentru orice număr natural nenul m cu m<p.

2. În exteriorul pătratului ABCD considerăm semicercurile S_1 și S_2 având diametrele BC respectiv CD. Punctele E și F sunt mijloacele arcelor S_1 respectiv S_2 iar P și Q sunt mijloacele segmentelor DE, respectiv AF.
   a) Demonstrați că punctele P și Q se găsesc pe diagonalele AC respectiv BD.
   b) Determinați măsurile unghiurilor triunghiului BQR, unde punctul R reprezintă intersecția dreptei PQ cu semicercul S_1.

3. Fie triunghiul ABC și AD bisectoarea sa, unde $D \in (BC)$.
Un cerc Γ ce trece prin A este tangent laturii BC în punctul D. Fie M al doilea punct de intersecție al cercului Γ cu latura AC și fie P al doilea punct de intersecție al dreptei BM cu cercul Γ.
Dacă notăm $AP \cap BD = \{Q\}$, demonstrați că Q este mijlocul segmentului (BD)

4. Considerăm 25 de puncte pe un cerc care impart cercul în 25 de arce egale.
Demonstrați că:
   a) Nu există 3 dintre ele care să fie vârfurile unui triunghi echilateral.
   b) Există cel puțin 5 dintre ele cu proprietatea că oricum am alege 3 dintre cele 5, acestea sunt vârfurile unui triunghi isoscel.

   Cele 25 de puncte se colorează la întâmplare cu 3 culori, a vârfuri cu roșu, b vârfuri cu galben și c vărfuri cu albastru.
   c) Arătați că dacă a, b, c sunt numere naturale distincte, de aceeași paritate atunci există trei puncte de aceeași culoare care sunt vârfurile unui triunghi isoscel.

Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete.
Fiecare problemă se punctează corespunzator de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru : 3 ore.