Scoala Gimnaziala nr. 97
Bucuresti, sector 4

Concurs MATE

Turneul Olimpicilor

Clasa a VIII-a

23 Mai 2015

1) a) Fie a,b,c numere reale pozitive. Demonstrați că : $ab+bc+ca \geq \sqrt{3abc(a+b+c)}$.

b) Fie a,b,c numere reale pozitive astfel încât $a+b+c = 1$.

Demonstraţi că: $a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{12abc} \leq 1$.

2) Să se determine cel mai mare număr natural n cu proprietatea că n este divizibil cu orice număr natural nenul d cu proprietatea că $d \leq \sqrt{n}$.

3) Se dă tetraedrul $A_1A_2A_3A_4$ şi M un punct în interiorul său. Fie B_i intersecţia dreptei A_iM cu faţa opusă, $i \in \{1,2,3,4\}$. Să se arate că printre rapoartele $\frac{A_iM}{MB_i}$,cu $i \in \{1,2,3,4\}$, există cel puţin unul care nu este mai mare decât 3 şi cel puţin unul care nu este mai mic decât 3 .

4) Se consideră ΔABC ascuțitunghic. Punctele M şi N se află pe laturile AB respectiv AC. Cercurile de diametre BN şi CM se intersectează în punctele P şi Q. Demonstraţi că punctele P,Q şi H sunt coliniare, unde H este ortocentrul ΔABC.

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare problemă se punctează corespunzator de la 0 la 7 puncte.