Scoala Gimnaziala nr. 97
Bucuresti, sector 4

MATE

Concurs

Turneul Olimpicilor

Clasa a VIII-a

13 Mai 2023

1. Numărul natural n și numerele reale a, b, c sunt soluții ale sistemului de ecuații:

$$\begin{cases} a(a+n) = b+c \\ b(b+n) = a+c \\ c(c+n) = a+b \end{cases}$$

   a) Arătați că cel puțin două dintre numerele a, b, c sunt egale.
   b) Determinați valorile lui n pentru care toate soluțiile (a, b, c) ale sistemului sunt numere întregi și rezolvați sistemul în acest caz.

2. Pentru n număr natural considerăm mulțimea $M_n = \{n+1, n+2, n+3, ..., n+10\}$.
   a) Determinați numerele naturale n cu proprietatea că suma elementelor mulțimii M_n este un pătrat perfect și cel mai mic număr natural n cu această proprietate.
   b) Arătați că pentru orice număr natural n produsul elementelor mulțimii M_n nu este un pătrat perfect.

3. Fie ΔABC cu înălțimile AD, BE, CF și raza cercului înscris în ΔABC egală cu r.
De aceeași parte a planului (ABC) se ridică perpendicularele AA_1, BB_1, CC_1 pe planul (ABC) astfel încât $AA_1 = AD$, $BB_1 = BE$, $CC_1 = CF$.
   a) Arătați că fiecare dintre tripletele de plane (A_1BC), (B_1AC), (C_1AB) și (A_1B_1C), (B_1C_1A), (C_1A_1B) au un singur punct comun.
Dacă notăm $(A_1BC) \cap (B_1AC) \cap (C_1AB) = \{M\}$ și $(A_1B_1C) \cap (B_1C_1A) \cap (C_1A_1B) = \{N\}$, demonstrați că:
   b) Distanța de la punctul M la planul (ABC) este egală cu r.
   c) Distanța de la punctul N la planul (ABC) este egală cu 2r.

4. Demonstrați că orice cub poate fi umplut cu 2023 de cuburi.

Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete.
Fiecare problemă se punctează corespunzator de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru : 3 ore.