Barem de corectare
clasa a VIII-a

1. Determinați câte soluții în mulțimea numerelor naturale are ecuația:

$2024+\left[\sqrt{x^2+2024}\right] = x+\left[\sqrt{2024^2+x}\right]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului a.

1.

(1p) $x^2 < x^2+2024 < x^2+2x+1 \Leftrightarrow 2023 < 2x$
$\Leftrightarrow 1011,5 < x, x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x \geqslant 1012.$

$\boxed{\text{I}}$ Dacă $x \geqslant 1012 \Rightarrow x < \sqrt{x^2+2024} < x+1 \Rightarrow$

(1p) $\left[\sqrt{x^2+2024}\right] = x \Rightarrow 2024+x = x+\left[\sqrt{2024^2+x}\right]$

(1p) $\Leftrightarrow 2024 = \left[\sqrt{2024^2+x}\right] \Leftrightarrow 2024 \leq \sqrt{2024^2+x} < 2025$

(1p) $\Leftrightarrow 2024^2 \leqslant 2024^2+x < 2025^2 \Leftrightarrow x < 2025^2 - 2024^2$

(1p)

$$\Leftrightarrow x < (2025-2024)(2025+2024) \Leftrightarrow x < 4049$$
$$\Leftrightarrow x \leqslant 4048 \Rightarrow x \in \{1012, 1013, 1014, \ldots, 4048\}$$
$$\Leftrightarrow x4048 - 1011 = 3037 \text{ soluții.}$$

$\boxed{\text{II}}$ Dacă $x \leqslant 1011 \Rightarrow 2024 \leqslant \sqrt{2024^2+x} < 2025$

(1p)

$$\Rightarrow \left[\sqrt{2024^2+x}\right] = 2024 \Rightarrow 2024+\left[\sqrt{x^2+2024}\right] =$$
$$= x+2024 \Rightarrow x = \left[\sqrt{x^2+2024}\right] \Leftrightarrow$$
$$x \leqslant \sqrt{x^2+2024} < x+1 \Leftrightarrow x \geqslant 1012 \text{ conform } \boxed{\text{I}}$$

(1p) Deci ecuația are 3037 soluții.

2. a) Determinați numerele naturale a astfel încât modulul numărului $a^3 - 5a + 2$ să fie număr prim.

b) Fie numerele reale a și b strict pozitive astfel încât $2a + b + \dfrac{4}{ab} = 10$.

Aflați valoarea maximă pe care o poate avea numărul a și valoarea lui b în acest caz.

2. a)

$\left|a^3 - 5a + 2\right| = \left|a^3 - 2a^2 + 2a^2 - 4a - a + 2\right| =$

(1p)

$$= \left|a^2(a-2) + 2a(a-2) - (a-2)\right| = \left|\, (a-2)\left(a^2+2a-1\right) \,\right|$$

$$= \text{nr. prim} \Rightarrow \boxed{\text{I}}\ |a-2| = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left|3^3 - 5 \cdot 3 + 2\right| = |27 - 15 + 2| = 14 \neq \text{ prim } \frac{1}{2} \text{ sau}$$

(1p) $|1 - 5 + 2| = 2 \Rightarrow a = 1$ convine.

$\boxed{\text{II}}$

(1p)

$$\left|a^2 + 2a - 1\right| = 1 \Rightarrow a^2 + 2a - 1 = \pm 1 \Rightarrow$$
$$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1 = 3 \text{ sau } 1 \Rightarrow a + 1 = 1\text{sau} - 1 \Rightarrow$$
$$a = 0 \text{ și } \left|0^3 - 5 \cdot 0 + 2\right| = 2 \text{ prim}$$
$$\Rightarrow a \in \{0, 1\}.$$

b) $10 = 2a + b + \dfrac{4}{ab} \geqslant 2a + 2\sqrt{b \cdot \dfrac{4}{ab}} = 2a + \dfrac{4}{\sqrt{a}}$

(1p) $\Rightarrow 5\sqrt{a} \geqslant a\sqrt{a} + 2 \Rightarrow 0 \geqslant (\sqrt{a})^3 - 5\sqrt{a} + 2 \Rightarrow$

(1p) $\Rightarrow 0 \geqslant (\sqrt{a} - 2)(a + 2\sqrt{a} - 1)$

Dacă $\sqrt{a} > 2 \Rightarrow (\sqrt{a} - 2)(a + 2\sqrt{a} - 1) > 0 \Rightarrow$ **contradicție**

(1p) $\Rightarrow \sqrt{a} \leq 2 \Rightarrow \sqrt{a}$ pate fi maxim 2, adică $a = 4$. Pentru $a = 4$

$$\Rightarrow 8 + b + \frac{1}{b} = 10 \Rightarrow b + \frac{1}{b} = 2 \Rightarrow (b-1)^2 = 0$$

(1p) $\Rightarrow b = 1$. Deci valoarea maxim posibil a lui a este 4 și valoarea lui b corespunzătoare este 1.

3. Fie mulțimea $M = \{1, 2, 3, \ldots, 2024\}$.
a) Dați exemplu de 3 submulțimi $\mathrm{A, B, C}$ ale lui M astfel încât: $\mathrm{A \cup B \cup C = M, A \cap B \cap C = \varnothing}$ și $\mathrm{|A| = |B| = |C| = 1349}$.
b) Arătați că dacă $\mathrm{A, B, C}$ sunt submulțimi ale lui M astfel încât: $A \cup B \cup C = M$ și $|A| = |B| = |C| = 1350$ atunci $A \cap B \cap C \neq \varnothing$. Am notat cu |X| cardinalul mulțimii X.

a) Un exemplu este :
(2p)

$$\begin{aligned} &A = \{1, 2, 3, \ldots, 1349\} \\ &B = \{2024, 2023, 2022, \ldots, 676\} \\ &C = \{1, 2, 3, \ldots, 675, 1351, 1352, \ldots, 2024\}. \end{aligned}$$

b) Presupunem pin reducere la absurd că există $A, B, C \subset M$ astfel încât:

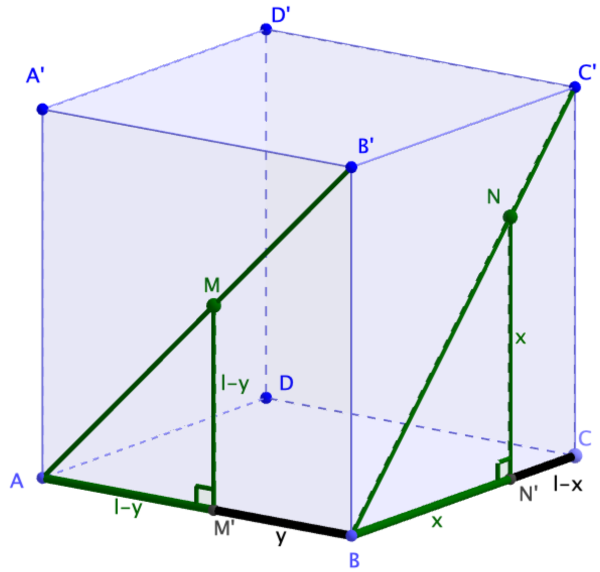
(1p) $|A| = |B| = |C| = 1350, A \cup B \cup C = M$ si $A \cap B \cap C = \varnothing$.
Dacă $|A \cap B| = n, (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \cup (A \cap B) = M$ și
$A \backslash B, B \backslash A, A \cap B$ sunt disjuncte două câte două
$\Rightarrow |A \backslash B| + |B \backslash A| + |A \cap B| \leqslant 2024 \Rightarrow$
$1350 - n + 1350 - n + n \leqslant 2024 \Rightarrow n \geqslant 2700 - 2024$
Analog $|A \cap C| = |B \cap C| \geqslant 676$.

(1p) $n \geqslant 676$. Dar

$$\begin{aligned} &|M| = |A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + \\ &+ |A \cap B \cap C| \Rightarrow 2024 \leqslant 3 \cdot 1350 - 3.676 + 0 \end{aligned}$$

(2p) $\Rightarrow 2024 \leqslant 4050 - 228 = 2022$ contradicție
$\Rightarrow$ presupunerea făcută este falsă $\Rightarrow A \cap B \cap C \neq \varnothing$.

4. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub si punctele $M \in (AB')\,, N \in (BC')$ astfel încât MN face un unghi de $60°$cu planul (ABC). Aflați lungimea minimă pe care o poate avea MN dacă muchia cubului are lungimea egală cu a.



(1p) Ducem $MM' \perp AB, M' \in (AB)$ și $NN' \perp BC, N' \in (BC) \Rightarrow$
$MM', NN' \perp (ABC)$ și $pr_{(ABC)}[MN] = [M'N'] \Rightarrow$

(1p) $M'N' = MN \cdot \cos 60° \Rightarrow MN = 2M'N'$.
Notăm $BM' = y, BN' = x \Rightarrow AM' \equiv NM' = l - y$,
$NN' = x, N'C = l - x \Rightarrow$

(1p) $AM' \equiv NM' = l - y, NN' = x, N'C = l - x \Rightarrow$
$MN^2 = BM'^2 + NN'^2 + (MM' - NN')^2 = x^2 + y^2 + (l - x - y)^2$
$M'N'^2 = x^2 + y^2, MN^2 = 4M'N'^2 \Longrightarrow$
$4\left(x^2 + y^2\right) = x^2 + y^2 + [l - (x + y)]^2 \Rightarrow$

(1p) $3\left(x^2 + y^2\right) = [l - (x + y)]^2$. Notăm $u^2 = x^2 + y^2$ și $v = x + y$
$\Rightarrow 3u^2 = (l - v)^2$ și $MN^2 = u^2 + (l - v)^2 = u^2 + 3u^2 = 4u^2 \Rightarrow$
$MN = 2u$.

(1p) Dar $2u^2 = 2\left(x^2 + y^2\right) \geqslant (x + y)^2 \Rightarrow 2u^2 \geqslant v^2 \Rightarrow$

$$(l - v)^2 = 3u^2 \geqslant \frac{3v^2}{2} \Rightarrow l - v \geqslant \frac{v \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$
$$l \geqslant \frac{v(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{\sqrt{2}} \Rightarrow v \leqslant \sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot l \Rightarrow$$

(1p) $v \leqslant (\sqrt{6} - 2) \cdot l \Rightarrow l - v \geqslant l(1 - \sqrt{6} + 2) = l(3 - \sqrt{6})$

$\Rightarrow MN^2 = 4u^2 = \frac{4}{3} \cdot 3u^2 = \frac{4}{3}(l - v)^2 \geqslant \frac{4}{3}l^2(3 - \sqrt{6})^2$

(1p) $\Rightarrow MN \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}}(3 - \sqrt{6})l \Rightarrow MN \geqslant 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})l \Rightarrow$

$\Rightarrow \min MN = 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot l$ și se atinge pentru $x = y = \dfrac{l(\sqrt{6} - 2)}{2}$.