Scoala Gimnaziala nr. 97
Bucuresti, sector 4

MATE

Concurs
Turneul Olimpicilor

INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREŞTI

Clasa a VIII-a 25 Mai 2024

1. Determinați câte soluții în mulțimea numerelor naturale are ecuația:
$2024+\left[\sqrt{x^2+2024}\right]=x+\left[\sqrt{2024^2+x}\right]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului a.

2. a) Determinați numerele naturale a astfel încât modulul numărului a^3-5a+2 să fie număr prim.

b) Fie numerele reale a și b strict pozitive astfel încât $2a+b+\dfrac{4}{ab}=10$.
Aflați valoarea maximă pe care o poate avea numărul a și valoarea lui b în acest caz.

3. Fie mulțimea $M=\{1,2,3,\ldots,2024\}$.
a) Dați exemplu de 3 submulțimi $\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}$ ale lui M astfel încât: $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\cup\mathrm{C}=\mathrm{M}, \mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{C}=\varnothing$ și $|\mathrm{A}|=|\mathrm{B}|=|\mathrm{C}|=1349$.
b) Arătați că dacă $\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}$ sunt submulțimi ale lui M astfel încât: $A\cup B\cup C=M$ și $|A|=|B|=|C|=1350$ atunci $A\cap B\cap C\neq\varnothing$. Am notat cu |X| cardinalul mulțimii X.

4. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub si punctele $M\in(AB'), N\in(BC')$ astfel încât MN face un unghi de $60°$cu planul (ABC). Aflați lungimea minimă pe care o poate avea MN dacă muchia cubului are lungimea egală cu a.

Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete.
Fiecare problemă se punctează corespunzător de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore