Barem de corectare
clasa a VII-a

1. Determinați cel mai mic număr natural $n, n \geq 2$, pentru care 2024^n se poate scrie ca suma a n numere naturale consecutive.

1. $\boxed{\text{I}}$ Vom arăta că n nu poate fi par. Dacă presupunem că n este par, atunci
(1p) $n = 2^k \cdot p,\ p\ impar, k \geq 1 \implies$

$$S = a + a + 1 + a + 2 + ... + a + n - 1 = na + \frac{(n-1) \cdot n}{2} =$$

$$= 2^k \cdot p \cdot a + (2^k \cdot p - 1) \cdot 2^{k-1} \cdot p = 2^{k-1} [\underbrace{2pa + p\left(2^2 p - 1\right)}_{\text{impar}}]$$

(1p) $S \vdots 2^{k-1}$ și $S \not\vdots\, 2^k$.

(1p) $2024^n = 2024^{2^k \cdot p} = 2^{3 \cdot 2^k \cdot p} \cdot 11^{2^k \cdot p} \cdot 23^{2^k \cdot p} \vdots 2^{3 \cdot 2^k \cdot p} \vdots 2^k$ deoarece $2^k > k, \forall k \geq 1 \implies S \neq 2024^n$

$\boxed{\text{II}}$ Dacă $n = impar \implies n = 2p + 1 \implies$

(1p) $a - p + a - (p-1) + ... + a - 1 + a + a + 1 + ... + a + p = (2p+1) \cdot a$
$= na = 8^n \cdot 11^n \cdot 23^n \implies$

(1p) $n\ impar, n \mid 8^n \cdot 11^n \cdot 23^n, n\ minim, n \geq 2$

(1p) $\implies n = 11 \implies a = 8^{11} \cdot 11^{10} \cdot 23^{11} \implies a = 184 \cdot 2024^{10}, p = 5 \implies$

(1p) $184 \cdot 2024^{10} - 5, 184 \cdot 2024^{10} - 4, ..., 184 \cdot 2024^{10} + 5$

2. a) Determinați numerele $\overline{ab}$ de două cifre astfel încât numărul $\sqrt{a^2 + b^2 + 2024}$ să fie rațional.
b) Arătați că numărul $\sqrt{\overline{ab}^2 + \overline{ba}^2 + 2024}$ este irațional pentru orice număr $\overline{ab}$ de două cifre nenule.

2.a) a, b cifre $\implies 1 \leq a^2 + b^2 \leq 2 \cdot 81 = 162;\ x \in \mathbb{N}, \sqrt{x} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow$ x este pătrat perfect $\implies a^2 + b^2 + 2024 =$ pătrat perfect $\implies$

(1p) $2025 \leq a^2 + b^2 + 2024 \leq 162 + 2024 = 2186$
$45^2 = 2025, 46^2 = 2116, 47^2 = 2209 \implies$

(1p) $a^2+b^2 \in \{1, 92\} \implies a=1,\ b=0$ sau $a^2+b^2=92=M_4$
$\implies a, b$ au aceeași paritate. Dacă a, b impare $\implies a^2+b^2=M_4+2$,
fals. $\implies$

(1p) $a=2x, b=2y \implies x^2+y^2=92:4=23=M_4+3,$ fals $\implies$
$\overline{ab}=10,$ unica soluție.

b) Presupunem prin reducere la absurd că $\sqrt{\overline{ab}^2+\overline{ba}^2+2024} \in \mathbb{Q} \implies$

(1p) $N=\overline{ab}^2+\overline{ba}^2+2024=$ pătrat perfect $\implies$
$(10a+b)^2+(10b+a)^2+2024=$ pătrat perfect $\implies$

(1p) $100a^2+20ab+b^2+100b^2+20ab+a^2+2024=101(a^2+b^2)+40ab+2024$
$99(a^2+b^2)+44ab+2024+2(a^2+b^2)-4ab=M_{11}+2(a-b)^2$. Dar

(1p)

x mod 11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x^2 mod 11	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1
$2x^2$ mod 11	0	2	8	7	10	6	6	10	7	8	2

Din tabel avem că dacă N e pătrat perfect $2(a-b)^2=M_{11} \implies 6\cdot 2(a-b)^2=$
$M_{11} \implies (a-b)^2 \vdots 11$ $a, b,$ $cifre \implies a=b \implies$

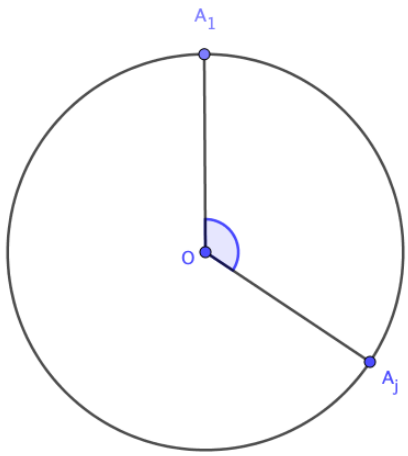
(1p) $N=202a^2+40a^2+2024=242a^2+2024.$
Dar $242 \vdots 11^2, 2024 \vdots 11$ și $2024 \not\vdots 11^2 \implies N \vdots 11,\ N \not\vdots 11^2 \implies N$ nu este pătrat perfect
contradicție $\implies$ presupunerea făcută este falsă $\implies \sqrt{N} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

3. a) Fie un poligon regulat cu n laturi. Aflați câte distanțe distincte și nenule determină vârfurile acestui poligon. **b)** Punctele de pe un cerc se colorează cu n culori. Demonstrați că există 4 puncte de pe cerc colorate cu aceeași culoare și care sunt capetele a două coarde paralele.

3.a) Două coarde în cerc sunt congruente dacă și numai dacă subântind arce mici congruente.

(1p) $A_1\hat{O}A_j = \dfrac{(j-1)180^\circ}{n} \leq 180^\circ \Leftrightarrow$

(1p) $j-1 \leq \dfrac{n}{2} \Leftrightarrow j \leq \dfrac{n+2}{2}$ $j \in \{2, 3, ..., \left[\dfrac{n}{2}\right]+1\} \implies \left[\dfrac{n}{2}\right]$ distanțe distincte nenule.



3. b)

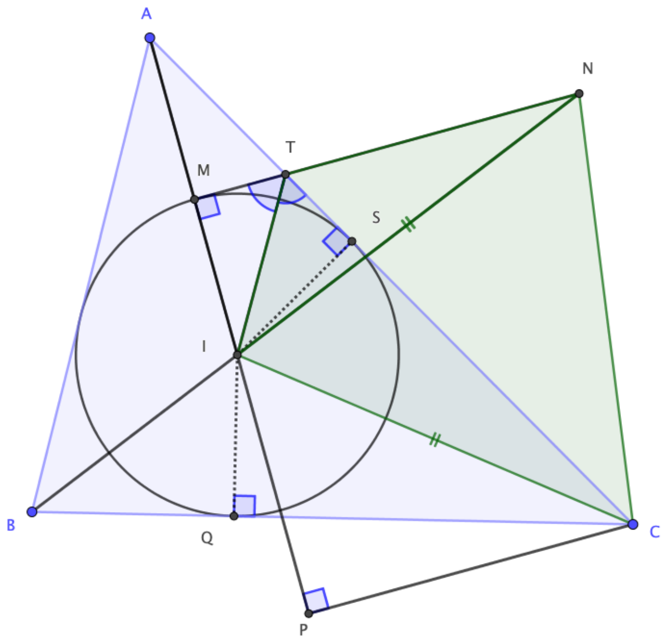
(1p) Într-un poligon regulat cu $n+1$ laturi pe cerc există cel puțin două puncte de aceeași culoare. Într-un poligon regulat cu $n+1$ vârfuri avem $\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$ distanțe între vârfurile poligonului conform punctului a).

(1p) Considerăm $n \cdot \left[\dfrac{n+1}{2}\right] + 1$ poligoane regulate distincte cu $n+1$ vârfuri pe cercul dat.

(1p) Deoarece avem n tipuri de coarde care au capetele la fel colorate și $\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$ lungimi posibile, folosind principiul cutiei va exista două coarde de aceeași lungime și cu capetele la fel colorate.

(1p) Dar cele 4 puncte determină vârfurile unui dreptunghi sau ale unui trapez isoscel, așadar două coarde vor fi paralele.

4. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ascuțitunghic ΔABC, iar M punctul de intersecție al acestui cerc cu segmentul AI. Perpendiculara în M pe AI intersectează dreapta BI în N iar perpendiculara din C pe AI intersectează dreapta AI în P. Demonstrați că: a) Triunghiul ΔINC este isoscel. b) $BM \parallel PN$



4. a)

Notăm $MN \cap AS = \{T\} \implies TM, TS$ tangente la cerc, unde $IS \perp AC$, $IQ \perp BC$. $\implies$

(1p) TI bisectoare pentru $M\hat{T}S \implies A\hat{I}N = \dfrac{\hat{A}}{2} + \dfrac{\hat{B}}{2} = \dfrac{180^\circ - \hat{C}}{2} =$

$= 90^\circ - \dfrac{\hat{C}}{2} \implies M\hat{N}I = \dfrac{\hat{C}}{2} = T\hat{C}I \implies$

(1p) patrulaterul $ICNT$este inscriptibil $\implies$

$$I\hat{N}C = I\hat{T}C = \frac{M\hat{T}C}{2} = \frac{180^\circ - A\hat{T}M}{2} = \frac{180^\circ - (90^\circ - \frac{\hat{A}}{2})}{2} = 45^\circ + \frac{\hat{A}}{2}.$$

(1p) $N\hat{I}C \equiv N\hat{T}C = A\hat{T}M = 90^\circ - \dfrac{\hat{A}}{2} \implies$

$$I\hat{C}N = 180^\circ - (45^\circ + \frac{\hat{A}}{4} + 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}) = 45^\circ + \frac{\hat{A}}{4}$$

(1p) $I\hat{N}C \equiv I\hat{C}N \implies \Delta INC$ isoscel

4. b)

$P\hat{I}C = \dfrac{\hat{A}}{2} + \dfrac{\hat{C}}{2} = 90^\circ - \dfrac{\hat{B}}{2} \implies I\hat{C}P = \dfrac{\hat{B}}{2}\ \ IQ = IM = r.$

(1p) $I\hat{B}Q \equiv I\hat{C}P = \dfrac{\hat{B}}{2} \implies \Delta QBI \sim \Delta PCI \implies$

(1p) $\dfrac{IQ}{IB} = \dfrac{IP}{IC} \implies \dfrac{IM}{IB} = \dfrac{IP}{IN}, M\hat{I}B \equiv N\hat{I}P \implies$

(1p) $\Delta IMB \sim \Delta IPN (L.U.L) \implies B\hat{M}I \equiv I\hat{P}N \implies BM \parallel PN$