Barem de corectare
clasa a VI-a

1. Pe o tablă sunt scrise 97 de numere întregi consecutive, cele negative fiind mai puține decât cele pozitive nenule. Bogdan calculează media aritmetică a numerelor scrise pe tablă iar Cristi calculează media aritmetică a numerelor nenegative scrise pe tablă. Aflați cele 97 de numere știind că numărul obținut de Cristi este cu 10 mai mare decât cel obținut de Bogdan.

1. Notăm numerele consecutive

(1p) $-n, -(n-1), -(n-2), ..., -1, 0, 1, ..., n, n+1, ..., n+m$

(1p) $2n+1+m = 97$. Notăm cu B și C mediile aritmetice calculate de Bogdan respectiv Cristi

(1p) $B = \dfrac{-n-(n-1)...+n+n+1+...+n+m}{97} =$

(1p) $= \dfrac{n \cdot m + \dfrac{m \cdot (m+1)}{2}}{97} = \dfrac{\dfrac{m \cdot (2n+m+1)}{2}}{97} = m \cdot \dfrac{97}{2 \cdot 97} = \dfrac{m}{2}$

(1p) $C = \dfrac{0+1+...+(n+m)}{n+m+1} = \dfrac{(n+m) \cdot (n+m+1)}{2 \cdot (n+m+1)} = \dfrac{n+m}{2}$

(1p) $C = B + 10 \implies \dfrac{m+n}{2} = \dfrac{m}{2} + 10 \implies n = 20 \implies$ Numerele sunt:

(1p) $-20, -19, ..., -1, 0, 1, ..., 20, ..., 76$

2. Fie a, b, c trei numere raționale nenule astfel încât $a + \dfrac{1}{b} = b + \dfrac{1}{c} = 1$.

a) Demonstrați că $c + \dfrac{1}{a} = 1$.

b) Determinați toate tripletele (a, b, c) de numere raționale care respectă cerința știind că două dintre cele trei numere sunt întregi.

2. a)

Numerele a, b, c sunt diferite de 1.

(1p) $a + \dfrac{1}{b} = b + \dfrac{1}{c} = 1 \implies b = 1 - \dfrac{1}{c} = \dfrac{c-1}{c}$ și

(1p) $a = 1 - \frac{1}{b} = 1 - \frac{c}{c-1} = \frac{c-1-c}{c-1} = \frac{-1}{c-1} = \frac{1}{1-c}$

(1p) $\implies c + \frac{1}{a} = c + 1 - c = 1.$

2. b)

Din punctul a), rezultă că: $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a} = 1$. Datorită simetriei putem presupune

(1p) $a, b \in \mathbb{Z} \implies \frac{1}{b} = 1 - a \in \mathbb{Z} \implies b = \pm 1$

(1p)

$b = 1 \implies a = 0\ fals.$

$b = -1 \implies a - 1 = 1 \implies a = 2$

$c + \frac{1}{2} = 1 \implies c = \frac{1}{2}$ și

$b + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 \implies b + 2 = 1 \implies b = -1$

(1p) $\implies a = 2, b = -1, c = \frac{1}{2}$ avem 6 soluții

(1p) permutările numerelor $2, -1, \frac{1}{2}$.

3. a) Scrieți divizorii naturali ai numărului 2024.
Un număr prim p se numește $2024 - simpatic$ dacă cei 16 divizori naturali ai numărului 2024 se pot scrie într-un pătrat 4x4 astfel încât suma numerelor de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană să fie divizibilă cu p.
b) Arătați că numărul 5 este $2024 - simpatic$. c) Determinați toate numerele prime p care sunt $2024 - simpatice$.

3. a)

(1p) $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$. Divizorii naturali ai lui 2024 sunt:

(1p) $1, 2, 2^2, 2^3, 11, 11 \cdot 2, 11 \cdot 2^2, 11 \cdot 2^3, 23, 23 \cdot 2, 23 \cdot 2^2, 23 \cdot 2^3, 11 \cdot 23,$

$11 \cdot 23 \cdot 2, 11 \cdot 23 \cdot 2^2, 11 \cdot 23 \cdot 2^3.$

3. b)

Este suficient să lucrăm cu resturile la împărțirea cu 5. Avem câte patru numere din fiecare rest nenul: 1,2,3,4. Putem completa astfel:

(1p)

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

(1p)

Suma divizorilor lui 2024 este $S = (1 + 2 + 2^2 + 2^3) \cdot (1 + 11 + 23 + 11 \cdot 23) = 15 \cdot 288 = 3 \cdot 5 \cdot 2^5 \cdot 3^2 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5$.

Dacă un număr prim p divide suma numerelor de pe fiecare linie va divide și suma numerelor de pe cele 4 linii adică suma tuturor divizorilor. Așadar, $p \mid 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5$. În concluzie, (1p) p poate fi $2, 3, 5$. Pentru $p = 5$ avem exemplul de punctul b). Pentru $p = 2$ se lucrează tot cu resturi și avem 4 resturi 1 și 12 resturi 0. O completare posibilă a resturilor:

(1p)

1	1	0	0
1	1	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

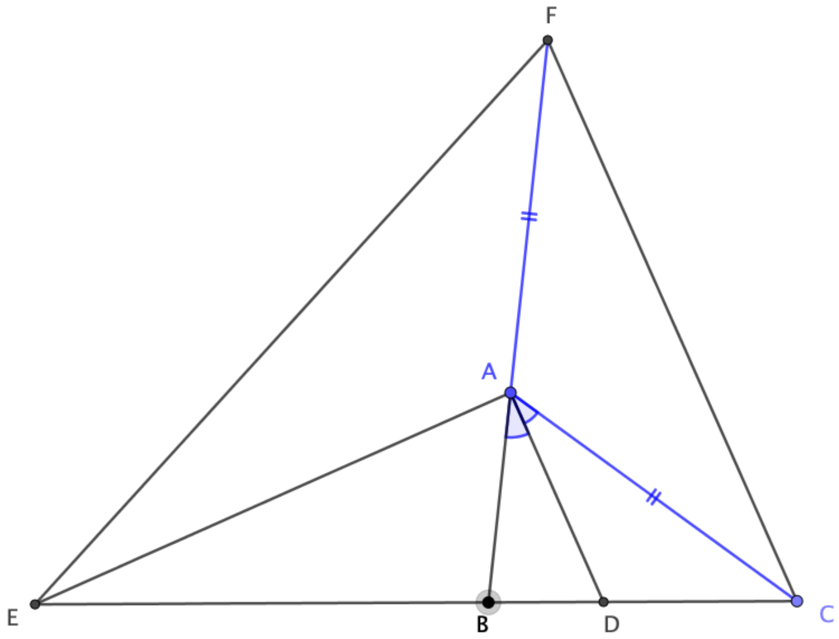
Pentru $p = 3$ avem 8 resturi 1 și 8 resturi 2. O completare posibilă este:

(1p)

1	2	1	2
2	1	2	1
1	2	1	2
2	1	2	1

4. Fie triunghiul ΔABC, $m(\angle A) = 60°, AB \neq AC$. Dacă AD *este bisectoarea* $\angle A, D \in (BC)$ *și* $AE \perp AD, E \in BC$, determinați măsurile unghiurilor triunghiului ΔABC știind că $AB + AC = BE$.

4. $\boxed{\text{I}}$ $B \in (DE)$



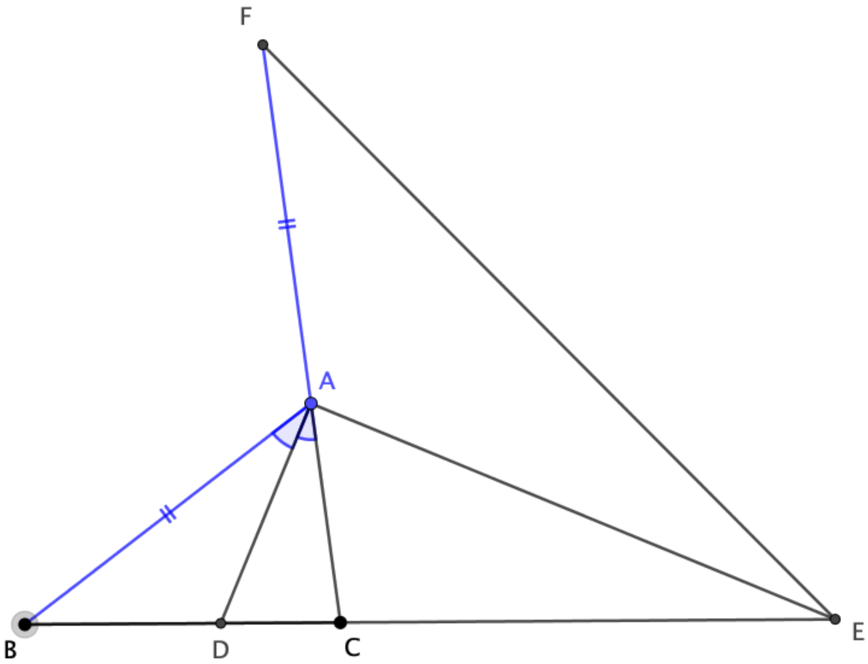
(1p) Fie $F \in (BA \setminus (AB)$ astfel încât $AF \equiv AC$,
$E\hat{A}C = 90° + 30° = 120°, F\hat{A}C = 180° - 60° = 120° \implies$
$E\hat{A}F = 360° - 2 \cdot 120°$.

(1p) $\implies \Delta EAC \equiv \Delta EAF(L.U.L) \implies \Delta EFC$ *isoscel*,
Dar $EB = AB + AC = AB + AF = BF$

(1p) $\implies \Delta BEF$ *isoscel* $\implies C\hat{E}F \equiv E\hat{F}B \equiv A\hat{C}E = x$
$A\hat{F}C \equiv A\hat{C}F = 30° \implies 3x + 30° \cdot 2 = 180° \implies 3x = 120° \implies$

(1p) $x = 40° \implies 2 \cdot \hat{E} = 2 \cdot 40° = 80^{\cdot} \implies A\hat{C}B = 40°$

$\boxed{\text{II}}$ $D \in (BE)$



(1p) Fie $F \in (CA \setminus (AC)$ astfel încât $AF \equiv AB$,
$\implies \Delta EAB \equiv \Delta EAF(L.U.L) \implies \Delta EFB\ isoscel$,
$Dar\ FC = FA + AC = AB + AC = BE = FE \implies$

(1p) $\implies \Delta FCE\ isoscel \implies C\hat{F}E \equiv A\hat{B}E = x.\ Dar\ A\hat{C}E = 60^\circ + x$
$\implies F\hat{C}E \equiv F\hat{E}C = x + 60^\circ \implies$

(1p) În $\Delta FCE : x + 2 \cdot (60^\circ + x) = 180^\circ \implies$
$x = 20^\circ \implies \hat{B} = 20^\circ,\ \hat{C} = 100^\circ.$