Barem de corectare
clasa a v-a

1.a) Scrieți ca fracție zecimală periodică mixtă rezultatul calculului $0,4 \cdot 0,(2) + 0,2 \cdot 0,(4)$**.**

b) Pentru câte numere $\overline{ab}$ de două cifre nenule și diferite de 9 rezultatul calcului $0,a \cdot 0,(b) + 0,b \cdot 0,(a)$ reprezintă o fracție zecimală periodică simplă?

1a)

(1p) $0,4 \cdot 0,(2) + 0,2 \cdot 0,(4) = \frac{4}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{4}{9} =$

(2p) $\frac{8}{90} + \frac{8}{90} = \frac{16}{90} = \frac{8}{45} = 8 : 45 = 0,1(7)$

1b)

(1p) $0,a \cdot 0,(b) + 0,(a) \cdot 0,(b) = \frac{a}{10} \cdot \frac{b}{9} + \frac{a}{9} \cdot \frac{b}{10} =$
$\frac{ab}{90} + \frac{ab}{90} = \frac{2ab}{90} = \frac{ab}{45} = \frac{ab}{5 \cdot 9}$,

(2p) pentru a se transforma în fracție zecimală periodică simplă trebuie ca $a \cdot b \,\vdots\, 5 \;\; a, b \; cifre \implies a = 5 \; sau \; b = 5 \implies$

(1p) a=5, b=1,2,...,8 iar pentru b=5, a =1,2,...,8

(1p) Dar 55 se numără de două ori $\implies 8 + 8 - 1 = 15$ fracții.

2. Determinați 21 de numere naturale consecutive, fiecare număr având 2 cifre, știind că putem elimina un număr $\overline{ab}$ dintre ele astfel încât media aritmetică a numerelor rămase să crească cu $\frac{\overline{ab}}{30}$. Aflați toate variantele posibile.

Putem scrie cele 21 de numere $x - 10, x - 9, ..., x + 9, x + 10 \implies$

(1p) $m_1 = \frac{(x-10) + (x-9) + ..., +x + 9) + (x + 10)}{21} = \frac{21 \cdot x}{x} = x$

iar suma celor 21 de numere este $21 \cdot x$

(1p) $m_2 = \frac{21 \cdot x - \overline{ab}}{20} = x + \frac{\overline{ab}}{30} \implies 21 \cdot x - \overline{ab} = 20 \cdot x + 20 \cdot \frac{\overline{ab}}{30} \implies$

$21 \cdot x - 20 \cdot x = \overline{ab} + \frac{2}{3} \cdot \overline{ab} = \frac{5 \cdot \overline{ab}}{3} \implies$

(1p) $3 \cdot x = 5 \cdot \overline{ab}, dar\ x - 10 \le \overline{ab} \le x + 10 \implies 5(x-10) \le 5\overline{ab} \le 5(x+10) \Leftrightarrow$
(1p) $5x - 50 \le 3x \le 5x + 50 \Leftrightarrow 2x \le 50 \Leftrightarrow x \le 25 \implies 3x \le 75 \implies 5\overline{ab} \le 75 \implies \overline{ab} \le 15$
(1p) dar $\overline{ab} \vdots 3 \implies \overline{ab} = 15\ sau\ \overline{ab} = 12$

(1p) $\boxed{\text{I}}$ $Pentru\ \overline{ab} = 15 \implies x = 25 \implies numerele\ sunt\ 15, 16, 17, ..., 35.$

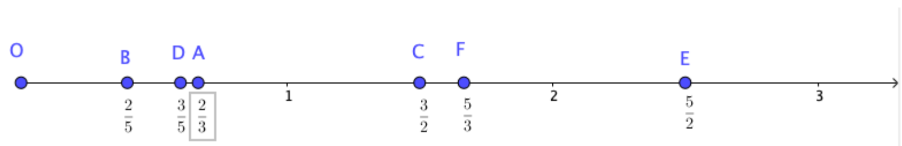
(1p) $\boxed{\text{II}}$ $Pentru\ \overline{ab} = 12 \implies x = 20 \implies numerele\ sunt\ 10, 11, 12, ...20.$

3. a) Fracțiile $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{2}, \frac{3}{5}, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}$ se reprezintă pe axa numerelor în punctele A, B, C,D,E,respectiv F. Care este ordinea punctelor pe axă și care este lungimea cea mai mică a unui segment având capetele printre cele 6 puncte? Justificați răspunsul dat.

b) Cu numerele naturale nenule și distincte a, b, c formăm fracțiile $\frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{b}{a}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}, \frac{c}{b}$.

Din fiecare fracție scădem fiecare fracție mai mică decât ea obținând astfel 15 diferențe. Demonstrați că cea mai mică diferență este mai mică decât 0,41.

3. a)
(1p)



(1p)
Ordinea punctelor de la stânga la dreapta: B, D, A, C, F, E. Pentru lungimea minimă a unui segment este suficient să aflăm lungimile dintre puncte consecutive reprezentate pe axă.

$$BD = \frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5},\ DA = \frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{10}{15} - \frac{9}{15} = \frac{1}{15}$$

$$AC = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{9-4}{6} = \frac{5}{6},\ CF = \frac{5}{3} - \frac{3}{2} = \frac{10-9}{6} = \frac{1}{6}$$

$EF = \frac{5}{2} - \frac{5}{3} = \frac{15-10}{6} = \frac{5}{6} \implies$

(1p) lungimea cea mai mică este $DA = \frac{1}{15}$

3. b)

(1p) Dacă $x \neq y$ dintre fracțiile $\frac{x}{y}$ și $\frac{y}{x}$ una este subunitară și cealaltă este supraunitară și $\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} = 1$. Așadar vom avea trei fracții subunitare și trei fracții supraunitare pe care le ordonăm
1p) $f_1 < f_2 < f_3 < 1 < f_4 < f_4 < f_5 < f_6$ obținem $f_1 \cdot f_6 = f_2 \cdot f_5 = f_3 \cdot f_4 = 1$
Presupunem prin reducere la absurd afirmația din problemă falsă. Rezultă că cea mai mică diferență va fi mai mare sau egală cu 0,41; așadar, toate diferențele vor fi mai mari sau egale cu 0,41. În concluzie,
(1p) $f_2 - f_1 \geq 0,41 \implies f_2 \geq 0,41 + f_1 > 0,41$
$f_3 - f_2 \geq 0,41 \implies f_3 \geq 0,41 + f_2 > 0,41 + 0,41 \implies f_3 \geq 0,82$
$f_4 - f_3 \geq 0,41 \implies f_4 \geq 0,41 + f_3 > 0,82 + 0,41 \implies f_4 \geq 1,23$
(1p) Dar $1 = f_3 \cdot f_4 \geq 0,82 \cdot 1,23 = 1,0086$ contradicție. Așadar, presupunerea făcută este falsă! În concluzie, cea mai mică diferență este mai mică sau egală decât 0,41.

4. a) Dați exemplu de 10 numere naturale distincte cu proprietatea că oricum am alege 6 dintre ele suma celor 6 numere nu este divizibilă cu 6.
b) Arătați că din orice 11 numere naturale putem alege 6 cu suma divizibilă cu 6.

4 a) Un exemplu este:

(1p) $6 \cdot 1 + 1, 6 \cdot 2 + 1, ..., 6 \cdot 5 + 1$
$6 \cdot 2 + 2, 6 \cdot 2 + 1, ..., 6 \cdot 5 + 2$. Suma oricăror 6 numere este de forma:

(1p) $M_6 + x + 2y \vdots 6 \leq x + 2y \vdots 6 \Leftrightarrow$
$(unde\ x + y = 6;\ x, y \leq 5 \implies x, y \geq 1)$

$x + y + y \vdots 6 \Leftrightarrow 6 + y \vdots 6 \Leftrightarrow y \vdots 6 \Leftrightarrow$ y=0 sau y=6, fals $\implies$

(1p) suma oricăror 6 numere dintre cele 10 nu este divizibilă cu 6.

4. b)

(1p) Din orice 11 numere putem forma 5 perechi de numere, numerele din fiecare pereche având aceeași paritate. Așadar, suma celor două numere din pereche va fi pară.

(1p) Notăm S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 suma numerelor din cele 5 perechi. Cele 5 sume vor fi de forma $M_6, M_6 + 2$ *sau* $M_6 + 4$.

(1p) $\boxed{\text{I}}$ Dacă există 3 sume de aceeași formă $M_6 + 2p \implies$ suma lor va fi $M_6 + 3 \cdot 2p = M_6 \implies$ suma celor 6 numere din cele 3 perechi va fi divizibilă cu 6.

(1p) $\boxed{\text{II}}$ Dacă nu există atunci vor fi maxim 2 sume din fiecare formă și cum avem 5 sume va rezulta că exis
$M_6 + 2 + M_6 + 4 = M_6$ și deci 6 numere cu suma divizibilă cu 6.